

Sommaire

VII- Exercices I

7-1/ Exercice 1-1

7-2/ Exercice 1-2

7-3/ Exercice 1-3

7-4/ Exercice 1-4

VII- Exercices I

7-1/ Exercice 1-1

1. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$$Z = (1 + i) \left(\frac{2+i}{1-i} \right)^2 - (1 + 3i) \left(\frac{2+i}{1-i} \right) + 6$$

2. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$(E_1) \quad (-1 + 4i)z + (1 - 2i) = iz + 3$$

$$(E_2) \quad \frac{1+3iz}{1+3z} = i \frac{z+2}{z-5}$$

3. Résoudre dans \mathbb{C}^2 les systèmes suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2iz + 3z' = i \\ iz + z' = 2 \end{cases}$$

$$(S_2) : \begin{cases} 3z - 2z' = -11 \\ iz + (1 + i)z' = 3(4 - i) \end{cases}$$

4. Montrer que l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $\frac{iz}{z-2}$ est réel est :

$$E = \left\{ x + iy / (x-1)^2 + y^2 = 1 \text{ et } (x; y) \neq (2; 0) \right\}$$

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe tel que $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

5. Déterminer tous les nombres complexes z dans chacun des cas suivants :

1 $iz^2 \in \mathbb{R}$

2 $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$

3 $\frac{1-iz}{1+z} \in i\mathbb{R}$

4 $\frac{z-1}{iz} \in i\mathbb{R}$

5 $\frac{3+iz}{(1+i)z-1} \in \mathbb{R}$

7-2/ Exercice 1-2

1. Déterminer le module de chacun des nombres suivants :

$$z_1 = (\sqrt{3} + i\sqrt{2})^2$$

$$z_2 = (2 + 3i)^2 + 5i$$

$$z_3 = (3 + 2i)^3$$

$$z_4 = \frac{2017+2i}{2017-2i}$$

$$z_5 = \left(\frac{\sqrt{17}-i}{5+3i}\right)^4$$

$$z_5 = (\sqrt{7} + i)(7 - i\sqrt{11})$$

$$z_7 = i(3 - 4i)^3(4 + i)^2$$

Soit u un nombre complexe tel que $|u| = 1$ et $u \neq 1$.

2. Montrer que $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-u}\right) = \frac{1}{2}$

3. Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $\frac{z-u\bar{z}}{1-u}$ est réel.

7-3/ Exercice 1-3

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$z_2 = -\sqrt{6} + i\sqrt{2}$$

$$z_3 = -2i$$

$$z_4 = \frac{2i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$$

$$z_5 = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$$

$$z_6 = (\sqrt{3} - i)^7$$

$$z_7 = \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)^8$$

$$z_8 = (1 - i)(1 - i\sqrt{3})$$

$$z_9 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$$

$$z_{10} = \frac{(1-i\sqrt{3})^{12}}{(1+i\sqrt{3})^7}$$

7-4/ Exercice 1-4

1. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha ; (\pi < \alpha < 2\pi)$$

$$z_2 = \cos \alpha + i(1 + \sin \alpha) ; \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$z_3 = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos \alpha + i \sin \alpha)}{(\cos \alpha + \sin \alpha) + i(\cos \alpha - \sin \alpha)} ; (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$z_4 = \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} ; \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$