Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-2-1 : Nombres complexes - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe non nul

8-1/ Racines $n^{ème}$ de l'unité

Définition 12

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On appelle racine $n^{ème}$ de l'unité tout nombre complexe u tel que $u^n = 1$.

L'ensemble des racines $n^{ème}$ de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

On a donc : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\}$

Remarque

Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$.

Remarques

1- On a $1 + j + j^2 = 0$ et $z^3 - 1 = (z-1)(z-j)\left(z-j^2\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2- Pour $n \in \{2; 3; 4\}$, le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ est aussi élément de $\mathbb{U}_n$.

En fait, ce résultat est valable pour tout entier $n \geq 2$.

3- Pour $n \in \{2; 3; 4\}$, l'inverse et le conjugué de tout élément de $\mathbb{U}_n$ sont aussi des éléments de $\mathbb{U}_n$.

En fait, ce résultat est valable pour tout entier $n \geq 2$. On a donc pour tout $z \in \mathbb{C}$:

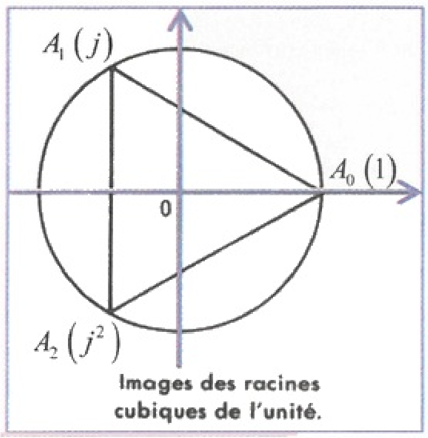
$$z \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \overline{z} \in \mathbb{U}_n \Leftrightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$$

4- Soit A_0, A_1, et A_2 les points du plan d'affixes respectives 1, j et j^2.

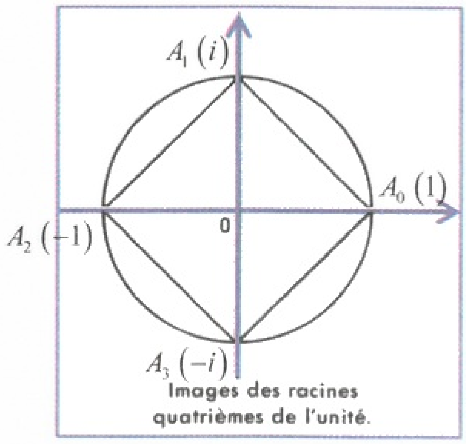
Alors, $A_0A_1A_2$ est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

5- Soit A_0, A_1, A_2 et A_3 les points du plan d'affixes respectives 1, i, -1 et $-i$.

Alors $A_0A_1A_2A_3$ est un carré inscrit dans le cercle trigonométrique.



Images des racines cubiques de l'unité.



Images des racines quatrièmes de l'unité.

Proposition 27

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont les nombres qui s'écrivent sous la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$.

On a donc :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\} \right\} \text{ et } card\mathbb{U}_n = n$$

Proposition 28

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tous u et v de $\mathbb{U}_n$:

$$u \times v \in \mathbb{U}_n \ ; \ \frac{1}{u} \in \mathbb{U}_n \ ; \ \overline{u} \in \mathbb{U}_n \ \left(\overline{u} = \frac{1}{u}\right)$$

Proposition 29

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Posons, pour tout $k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$: $\omega_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Alors :

1) Pour tout $k \in \{1; \ldots; n-1\}$: $\overline{\omega_k} = \omega_{n-k}$

2) Pour tout $k \in \{0; 1; \ldots; n-1\}$: $\omega_k = {\omega_1}^k$

3) La somme des n racines $n^{ème}$ de l'unité est nulle.

4) Les racines $n^{ème}$ de l'unité sont représentées dans le plan complexe par les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1. Ce polygone est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

8-2/ Racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe non nul

Définition 13

Soit Z un nombre complexe non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une racine $n^{ème}$ de Z est un nombre complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition 30

Soit $n \in \mathbb{N}* - \{1\}$ et Z un nombre complexe non nul d'argument φ : $Z = |Z|.e^{i\varphi}$.

Le nombre Z admet exactement n racines $n^{ème}$ données pai .

$$z_k = \sqrt[n]{|Z|}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)} \ / \ k \in \{0;1;\ldots;n-1\}$$

Remarques

Les racines $n^{ème}$ de Z s'obtiennent à partir de l'une d'entre elles en multipliant celle-ci par chacune des racines $n^{ème}$ de l'unité.

En effet, si z_0 est l'une des racines neme de ZZ , on a :

$$z^n = Z \Leftrightarrow z^n = z_0{}^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow [(\exists\omega \in \mathbb{U}_n)\ z = z_0\omega]$$

Par suite, l'ensemble des racines neme de Z est : $\{z_0\omega / \omega \in \mathbb{U}_n\}$

Ainsi, pour trouver les racines $n^{ème}$ de Z, il suffit donc d'en exhiber une et de la multiplier par toutes les racines $n^{ème}$ de l'unité.

Une bonne connaissance des racines $n^{ème}$ de l'unité est donc capitale pour résoudre ce type de problème.

IX- Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

9-1/ Racines carrées d'un nombre complexe

Résumé

Tout nombre complexe non nul Z admet exactement deux racines carrées opposées :

1) Si $Z = |Z|.e^{i\varphi}$, alors les racines carrées sont $\sqrt{|Z|}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et $\sqrt{|Z|}e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}$. En particulier :

- Si $Z \in \mathbb{R}_+^*$, ses racines carrées sont $\sqrt{Z}$ et $-\sqrt{Z}$.
- Si $Z \in \mathbb{R}_-^*$, ses racines carrées sont $i\sqrt{-Z}$ et $-i\sqrt{-Z}$.
- Si $Z \in i\mathbb{R}_+^*$, ses racines carrées sont $\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1+i)$ et $-\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1+i)$
- Si $Z \in i\mathbb{R}_-^*$, ses racines carrées sont $\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1-i)$ et $-\sqrt{\frac{|Z|}{2}}(1-i)$.

2) Si $Z = X + iY$ avec $(X;Y) \in (\mathbb{R}^*)^2$, et si $\alpha = \frac{1}{2}\left(X + \sqrt{X^2+Y^2}\right)$ et $\beta = \frac{1}{2}\left(-X + \sqrt{X^2+Y^2}\right)$, alors les racines carrées de Z sont :

- $\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta}$ et $-\sqrt{\alpha} - i\sqrt{\beta}$ si $Y > 0$
- $\sqrt{\alpha} - i\sqrt{\beta}$ et $-\sqrt{\alpha} + i\sqrt{\beta}$ si $Y < 0$

Remarque

Il n'est pas indispensable d'apprendre par cœur les résultats énoncés ci-dessus.

Il faut plutôt savoir la démarche à suivre pour la détermination des racines carrées d'un nombre complexe selon le contexte.

9-2/ Résolution algébrique d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 31

Soit $(a;b;c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, ainsi que l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes z_1 et z_2 données par $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ où δ est tel que $\delta^2 = \Delta$.

De plus, on a la factorisation : $(\forall z \in \mathbb{C})\ az^2 + bz + c = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)$

Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution, dite double, donnée par : $z = -\frac{b}{2a}$

De plus, on a la factorisation : $(\forall z \in \mathbb{C})\ az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$

Corollaire

Soit a ,b et c trois réels, a étant non nul, ainsi que l'équation dans $\mathbb{C}$: $(E)\ az^2 + bz + c = 0$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) a deux racines réelles distinctes z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) a une racine double réelle donnée par : $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) a deux racines complexes distinctes conjuguées z_1 et z_2 données par :

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_1 = \frac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Proposition 32

Soit a ,b et c trois nombres complexes, avec $a \neq 0$.

Les nombres complexes z_1 et z_2 (éventuellement égaux) vérifient $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$ si, et seulement si, z_1 et z_2 sont les deux racines (éventuellement confondues) de l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Remarque

On utilise la proposition précédente sous plusieurs formes :

- Si Ton sait que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors on peut simplifier toute expression symétrique e z_1 et z_2, et l'évaluer en fonction de $z_1 + z_2$ et $z_1 \times z_2$; et donc de a ,b et c, sans avoir à expliciter z_1 et z_2.

Dans la pratique, on rencontre souvent les expressions symétriques :

$${z_1}^n + {z_2}^n \ ; \ {z_1}^n \times {z_2}^n \ ; \ \frac{1}{{z_1}^n} + \frac{1}{{z_2}^n} \ ; \ \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \ (n \in \{1;2;3;4\})$$

- Si z_1 et z_2 sont les racines de l'équation $az^2+bz+c=0$, et si l'on connaît une de ces racines, alors on peut facilement en déduire l'autre.

- Si l'on connaît deux complexes s et p, et si l'on cherche z_1 et z_2 tels que $z_1+z_2=s$ et $z_1 \times z_2 = p$, alors une façon élégante et efficace de faire est de dire que z_1 et z_2 sont les racines de l'équation :

$$z^2 - sz + p = 0$$

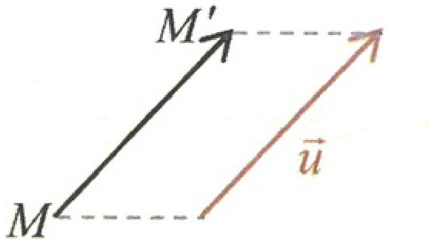
X- Transformations usuelles du plan

10-1/ La translation

Définition 14

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$



Proposition 33

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan et a son affixe.

La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est représentée dans le plan complexe $\mathscr{P}$ par l'application :

$$\begin{gathered} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = z + a \end{gathered}$$

La relation $z' = z + a$ s'appelle l'écriture (ou la formule) complexe de la translation T de vecteur $\overrightarrow{u}$ (a).

10-2/ L'homothétie

Définition 15

Soit Ω un point du plan et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M, associe l'unique point M' tel que : $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M}$

Proposition 34

L'homothétie de centre Ω, d'affixe ω et de rapport λ est représentée dans le plan complexe $\mathscr{P}$ par l'application :

$$\begin{gathered} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z' = \omega + \lambda(z - \omega) \end{gathered}$$

La relation $z' = \omega + \lambda(z - \omega)$ s'appelle l'écriture (ou la formule) complexe de l'homothétie H de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport λ.

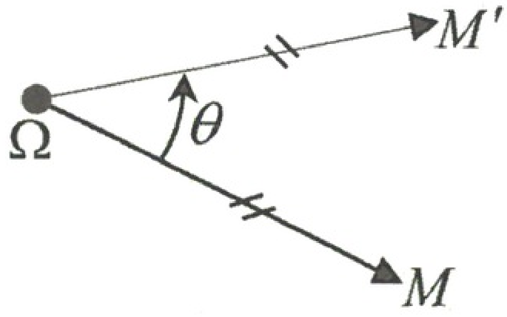
10-3/ La rotation

Définition 16

Soit Ω un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$.

La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application du plan dans lui-même qui transforme Ω en Ω, et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que :

$$\Omega M = \Omega M' \;\; et \;\; \left(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$$



Proposition 35

La rotation de centre Ω, d'affixe ω et d'angle θ est représentée dans le plan complexe $\mathscr{P}$ par l'application :

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$$

La relation $z' = \omega + e^{i\theta}(z - \omega)$ s'appelle l'écriture (ou la formule) complexe de la rotation R de
centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ.

10-4/ Composition de quelques transformations du plan

Résumé

a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Soit T la transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$.

1- Si $a = 1$, alors T est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.

2- Si $a \in \mathbb{R}^* \{1\}$, alors T est l'homothétie de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport a.

3- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors T est la rotation de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $arg(a)$.

4- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors T est la composée de la rotation R de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $arg(a)$, et l'homothétie H de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $|a|$.

Dans ce cas, on a : $T = R \circ H = H \circ R$