Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (9 pts)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on considère l'équation :

$$(E)\ :\ z^2 + [(1-a)i - a]z + a + a^2 i = 0$$

1. Montrer que : $\Delta = [(1+a)i - a]^2$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
3. Montrer que l'équation (E) admet une seule solution$\Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Supposons que $a \neq -1$, $a \neq -1 a \neq -i$ et $a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Soient $A(a)$, $B(ai)$, $C(a-i)$ et $D(-i)$.

4. Montrer que A, B et C sont alignés$\Leftrightarrow arg a \equiv \frac{3\pi}{4}\ [\pi]$

On pose $a = i$.

Soit R la rotation de centre B telle que $R(A) = D$.

5. Déterminer l'angle de la rotation R.

II- Exercice 2 (6 pts)

On considère l'application :

$$F\ :\ P \to P$$
$$M(z) \to M(z')/z' = (1+i)z - i$$

1. Montrer que F admet un seul point invariant A.
2. Montrer que $AM' = \sqrt{2} AM$ et $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
3. Montrer que AMM' est un triangle rectangle.

III- Exercice 3 (5 pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z-i)^5 = i(z+i)^5$
2. Montrer que si l'équation $z^2 - az + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$; $a \in \mathbb{C}$ admet deux solutions z_1 et z_2, alors : $arg(z_1) + arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $|z_1| \times |z_2| = 1$.