AlloSchool

Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Semestre 1 Devoir 3 Modèle 1

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

I- Exercice 1 (6 pts)

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n+4}{u_n+6} \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Vérifier que $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{u_n+6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_n > 1$.
4. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n+4)}{u_n+6}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déduire la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$.

On pose $v_n = \frac{u_n+4}{u_n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ v_{n+1} = \frac{7(u_n+4)}{2(u_n-1)}$
7. Déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{7}{2}$, et calculer v_0.
8. Exprimer v_n en fonction de n.
9. En déduire u_n en fonction de n.

II- Exercice 2 (5 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 2 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_n < \frac{5}{2}$
3. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{2} - u_n\right)$
4. Déduire que la suite (u_n) est croissante.

On pose : $(\forall n \in \mathbb{N})\ :\ v_n = u_n - \frac{5}{2}$

5. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$, et calculer v_0.
6. Exprimer v_n en fonction de n, puis déduire u_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S = v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_{20}$

7. Calculer S.

III- Exercice 3 (4 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:

$$A(x) = \sin(-x) + \cos(-x) + \sin(\pi + \mathrm{x}) + \cos(\pi - \mathrm{x})$$
$$B(x) = \cos(\pi + \mathrm{x}) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{x}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \mathrm{x}\right)$$
$$C(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{x}\right) + \cos(x - 3\pi) - \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \mathrm{x}\right)$$

2. Calculer $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ et $C\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

IV- Exercice 4 (5 pts)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $P(x) = \sqrt{3}\cos(3x) + \sin(3x) - \sqrt{3}\cos x - \sin x$

1. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ P(x) = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $P(x) = 0$
3. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ :\ P(x) = -4\sin x.\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
4. Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \geq 0$
5. En déduire le tableau de signe de $P(x)$ sur $[0; \pi]$.