AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-1-1 : Nombres complexes - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- L’ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

III- Représentation géométrique d’un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d’un vecteur

3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

IV- Conjugué d’un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

4-2/ Propriétés du conjugué

V- Module d’un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

5-2/ Propriétés du module

VI- Forme trigonométrique d’un complexe

6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

I- L’ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

Théorème 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$:

1- muni d’une addition notée et d'une multiplication notée x, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$) possédant les mêmes propriétés comme dans $\mathbb{R}$.

2- possédant un élément noté i dont le carré vaut : i .

3- où tout élément z, appelé nombre complexe ou complexe, s’écrit de manière unique sous la forme $z \quad x \quad iy$, avec x et y réels.

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R} \quad \mathbb{C}$

- L’addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

- Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d’ordre, et nous ne pourrons donc pas dire qu’un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu’il est positif.

- Les nombres complexes $x \quad iy$ et $x \quad yi$ où $\left(x \;\; y\right) \quad \mathbb{R}$ représentent le même nombre complexe.

- On a : $\mathbb{C} \quad \left\{x \quad iy \quad x \;\; y \quad \mathbb{R} \;\right\}$

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1

Étant donné $z \quad \mathbb{C}$, il existe un unique couple $\left(x \;\; y\right) \quad \mathbb{R}$ tel que $z \quad x \quad iy$.

L’écriture $x \quad iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.

Le nombre x est la partie réelle de z notée $Re \;\; z$.

Le nombre y est la partie imaginaire de z notée $Im \;\; z$.

Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle :
$z \quad \mathbb{R} \quad Im \;\; z$.

Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle :
$z \quad i\mathbb{R} \quad Re \;\; z$.

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

Proposition 1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

En d'autres termes :

$$\Big(\quad z \; z \qquad \mathbb{C} \Big) \; z \quad z \qquad Re\; z \qquad Re\; z \quad et \;\; Im\; z \qquad Im\; z$$

Remarques

Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe z :

$$\Big(\quad z \; z \qquad \mathbb{C} \Big) \; z \quad z \qquad Re\; z \qquad Re\; z \quad et \;\; Im\; z \qquad Im\; z$$

II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Proposition 2

Soit z et z deux nombres complexes tels que : $z \quad x \quad iy$ et $z \quad x \quad iy$ avec $x \; x \;\; y \; y \qquad \mathbb{R}$.

On a :

1- $z \quad z \qquad x \quad x \qquad i \;\; y \quad y$ et $z \quad z \qquad xx \quad yy \quad i \;\; xy \quad yx$

2- Pour tout $\lambda \qquad \mathbb{R} \qquad \lambda z \quad \lambda x \quad i \;\; \lambda y$

Remarques

Pour tout $z \;\; z \qquad \mathbb{C}$ et pour tout $\lambda \qquad \mathbb{R}$, on a :

$$Re \;\; z \quad z \qquad Re \;\; z \qquad Re \;\; z$$

$$Im \;\; z \quad z \qquad Im \;\; z \qquad Im \;\; z$$

$$Re \;\; \lambda z \qquad \lambda Re \;\; z$$

$$Im \;\; \lambda z \qquad \lambda Im \;\; z$$

Si $k \qquad \mathbb{N}$, alors $i^{\;\;k} \quad (i \;)^{k} \qquad\qquad {}^{k}$. Il en résulte donc :

$$i^{\;\;k} \qquad\qquad i^{\;\;k} \qquad i \qquad i^{\;\;k} \qquad\qquad\qquad i^{\;\;k} \qquad\qquad i$$

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

Proposition 3

Tout nombre complexe $z \quad x \quad iy$, où x et y sont des réels, possède un opposé dans $\mathbb{C}$ noté z, qui est le nombre complexe $x \quad iy$, et on écrit $z \qquad x \quad iy$.

Donc :

$$Re \quad z \qquad Re \;\; z \;\; et \; Im \quad z \qquad Im \;\; z$$

Définition 2

La différence de deux nombres complexes z et z est le nombre $z \quad z \quad z \qquad z$.

Remarques

Si x, x , y et y sont des nombres réels, alors :

$x \quad iy \quad x \quad iy \quad x \quad x \quad i\,y \quad y$

Les identités remarquables vues dans $\mathbb{R}$ restent aussi valables dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, pour tous nombres complexes z et z on a :

$$z \quad z \quad z \quad z\,z \quad z$$
$$z \quad z \quad z \quad z\,z \quad z$$
$$(z \quad z\,)(z \quad z\,) \quad z \quad z$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout $(a\ \ b) \quad \mathbb{R}$:

$$a \quad ib \quad a \quad b \quad abi$$
$$a \quad ib \quad a \quad b \quad abi$$
$$(a \quad ib)(a \quad ib) \quad a \quad b$$

On a aussi :

$$z \quad z \quad z \quad z \quad z \quad z\,z \quad z$$
$$z \quad z \quad z \quad z \quad z \quad z\,z \quad z$$
$$z \quad z \quad (z \quad z\,)(z \quad z\,z \quad z\ )$$
$$z \quad z \quad (z \quad z\,)(z \quad z\,z \quad z\ )$$

Et de façon générale, on a pour tout $z \quad z \quad \mathbb{C}$ et pour tout $n \quad \mathbb{N}$:

$z \quad z\ ^{n} \quad \sum_{p}^{n} \quad C_n^p \; z\ ^{p} \; z\ ^{n\ \ p} \quad \sum_{q}^{n} \quad C_n^q \; z\ ^{q} \; z\ ^{n\ \ q}$ (Formule du binôme de Newton)

$$z\ ^{n} \quad z\ ^{n} \quad z \quad z \quad (z\ ^{n} \quad z\ ^{n} \quad z \quad z\,z\ ^{n} \quad z\ ^{n}\ )$$
$$z\ ^{n} \quad z\ ^{n} \quad z \quad z \quad \sum_{k}^{n} \quad z\ ^{n\ \ k} \quad z\ ^{k}$$

Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier :

$$z\,z \quad \mathbb{C} \quad z \quad z \quad z \quad ou\ z$$

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

Proposition 4

Soit $z \quad x \quad iy$ un nombre complexe non nul tels que $(x\ \ y) \quad \mathbb{R}$.

L'inverse du nombre z est le nombre complexe noté $\frac{}{z}$ ou z tel que :

$$\frac{}{z} \quad \frac{}{x\ \ iy} \quad \frac{}{x\ \ y} \quad x \quad iy \quad \frac{x}{x\ \ y} \quad i\frac{y}{x\ \ y}$$

Proposition 5

Soit $z \quad x \quad iy$ et $z \quad x \quad iy$ deux complexes où x, x , y et y des réels tels que $x\ \ y$.

Le quotient de z par z est le nombre complexe noté $\frac{z}{z}$ tel que $\frac{z}{z}$ z $\frac{}{z}$, et on a :

$$\frac{z}{z} \quad \frac{x \quad iy}{x \quad iy} \quad \frac{xx \quad yy}{x \quad y} \quad i\frac{xy \quad yx}{x \quad y}$$

III- Représentation géométrique d’un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d’un vecteur

Définition 3

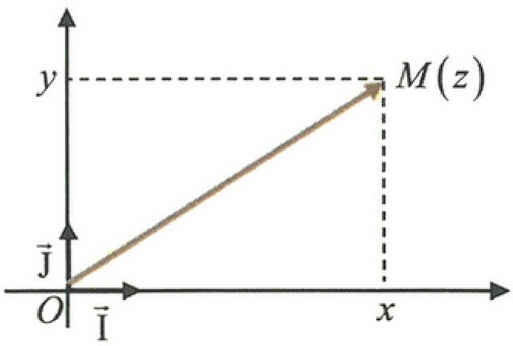
Le plan est muni d’un repère orthonormé direct $O \; I \; J$.

Soit $z \quad x \quad iy$ où $(x \; y) \quad \mathbb{R}$ un nombre complexe.

L’unique point M, de coordonnées $x \; y$ dans $O \; I \; J$, est appelé l’image du complexe z, et on écrit $M \; z$.

Soit M un point, de coordonnées $x \; y$ dans $O \; I \; J$.

Le nombre complexe $z \quad x \quad iy$ est appelé l'affixe du point M. On le note $Aff \; M$ ou z_M.



Remarques

Le plan est muni d’un repère orthonormé direct $O \; I \; J$.

À partir de la définition 3, on peut identifier l’ensemble au plan de la façon suivante :

- À tout nombre complexe $z \quad x \quad iy$ on associe le point $M \; x \; y$.
- À tout point $M \; x \; y$ du plan on associe le nombre complexe $z \quad x \quad iy$.

Ainsi, l’application $f \quad \mathbb{C}$

$z \quad M \; z$ est une bijection. Sa bijection réciproque est : $f \quad \mathbb{C}$

$M \quad Aff \; M$

Le plan est appelé alors le plan complexe, et on a :

$$(\quad M \; N \quad) \; Aff \; M \quad Aff \; N \quad M \quad N$$

Tout point de l’axe des abscisses est l’image d’un nombre réel, c’est pourquoi l’axe des abscisses

s’appelle l’axe réel. On a alors : $M \quad z \qquad O \quad I \qquad z \quad \mathbb{R}$

Tout point $B \qquad b$ de l’axe des ordonnées est l’image d’un nombre imaginaire pur $Aff \quad B \qquad bi$, c’est pourquoi l’axe des ordonnées s’appelle l’axe

imaginaire. On a alors : $M \quad z \qquad O \quad J \qquad z \quad i\mathbb{R}$

Définition 4

Le plan est muni d’un repère orthonormé direct $O \quad I \quad J$.

Soit $z \quad x \quad iy$ un nombre complexe où .

Le vecteur $u \qquad x \quad I \qquad y \quad J$ est appelé image du complexe z, et on écrit $u \quad z$.

De même, le nombre z est appelé affixe du vecteur u , et on écrit $Aff \quad u \qquad z$ ou parfois $z_u \qquad z$.

Remarques

Soit z un nombre complexe.

On a : $z \quad Aff \quad M \qquad z \quad Aff \quad OM$

Soit l'ensemble des vecteurs du plan.

L’application $g \quad \mathbb{C}$

$z \qquad w \quad z$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers , et on a :

$$u \quad v \qquad\qquad u \qquad v \qquad Aff \quad u \qquad Aff \quad v$$

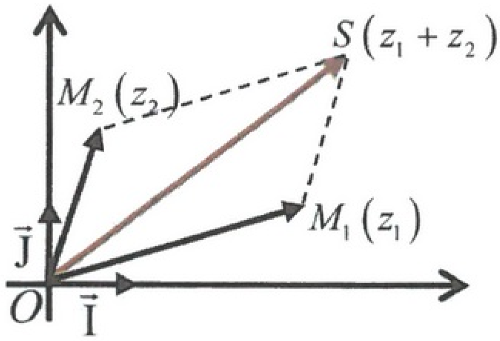
3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

Proposition 6

Si v et v sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives z et z , alors l'affixe du vecteur $v \qquad v$ est $z \qquad z$.

En d’autres termes : $Aff \quad v \qquad v \qquad Aff \quad v \qquad Aff \quad v$.

Si M et M sont les images respectives des affixes z et z , alors l’image du nombre $z \qquad z$ est le point S tel que : $OS \quad OM \qquad OM$ (C'est-à-dire $OM \quad SM$ est un parallélogramme).



Remarques

Soit z un nombre complexe et u z et v z deux vecteurs du plan.

On sait que Aff et z z , donc d'après la proposition 6, on en

déduit que u v .

Ainsi v u et alors : Aff u Aff u .

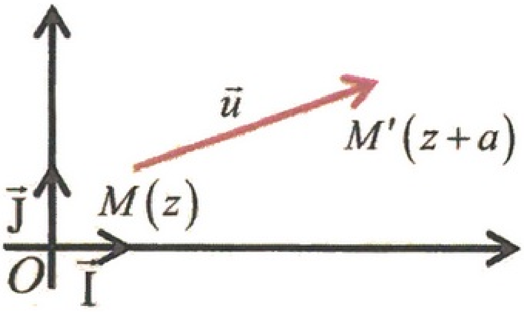
Soit M z et M z . Comme O et z z , alors OM OM OO ,

et par suite OM OM.

Ainsi, le point M z est le symétrique de point M z par rapport à O.

On peut aussi interpréter géométriquement l'addition de la manière suivante :

Étant donné un vecteur u d'affixe a, la translation de vecteur u transforme le point M d'affixe z, en le point M d'affixe z z a.

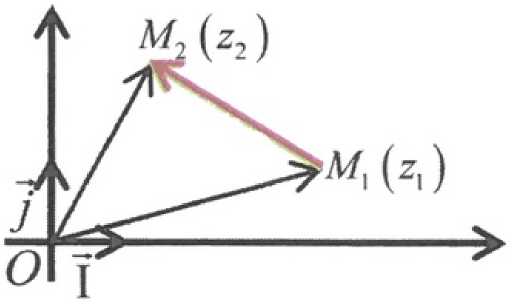


Proposition 7

Soit M z et M z deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur M M est z z .

En d'autres termes : Aff M M Aff M Aff M

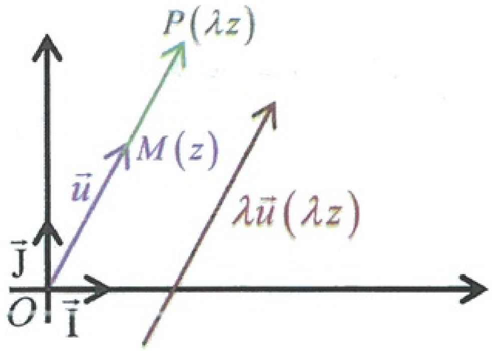


Proposition 8

Si u est un vecteur d'affixe z et λ un nombre réel, alors l'affixe du vecteur λu est λz.

En d'autres termes : $Aff \ \lambda u \qquad \lambda \ Aff \ \ u$

Si $M \ z$ est un point du plan, alors l'image du nombre complexe λz est le point P défini par : $OP \quad \lambda OM$.



Remarque

A l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :

Si v et v sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $\lambda \quad \lambda \qquad \mathbb{R}$, on a :

$$Aff \ \lambda \ v \quad \lambda \ v \qquad \lambda \ Aff \ v \qquad \lambda \ Aff \ v$$

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

Proposition 9

Soient A, B et C des points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si : $\frac{z_C \ \ z_A}{z_B \ \ z_A} \qquad \mathbb{R}$

Proposition 10

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \quad B$ et $C \quad D$.

Les droites AB et CD sont parallèles si et seulement si : $\frac{z_D \ \ z_C}{z_B \ \ z_A} \qquad \mathbb{R}$

Proposition 11

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, et soit $\alpha \ \beta \quad \mathbb{R}$ tel que $\alpha \quad \beta$.

L’affixe du barycentre G du système pondéré $a \ \alpha \quad B \ \beta$ est le complexe :

$$z_G \quad \frac{\alpha z_A \ \ \beta z_B}{\alpha \ \ \beta}$$

Remarques

Si $A \ z_A$ et $B \ z_B$ alors l'affixe du milieu I du segment AB est le nombre complexe $z_I \quad \frac{z_A \ \ z_B}{}$.

En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les « poids » sont égaux.

On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.

Plus précisément : si n est un entier naturel supérieur ou égal à et $\alpha \quad \alpha \qquad \alpha_n$ des réels tels que $\alpha \quad \alpha \qquad \alpha_n$, alors le barycentre G du système pondéré $A \quad \alpha \quad A \quad \alpha \qquad A_n \ \alpha_n$ a pour affixe :

$$z_G \quad \frac{\alpha \ z_A \quad \alpha \ z_A \qquad \alpha_n z_{A_n}}{\alpha \quad \alpha \qquad \alpha_n}$$

IV- Conjugué d’un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 5

Soit $z \quad x \quad iy$ un nombre complexe avec $(x \ \ y) \quad \mathbb{R}$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe $x \quad iy$, noté $\overline{z}$, et on écrit :

$\overline{z} \quad \overline{x \quad iy} \quad x \quad iy$.

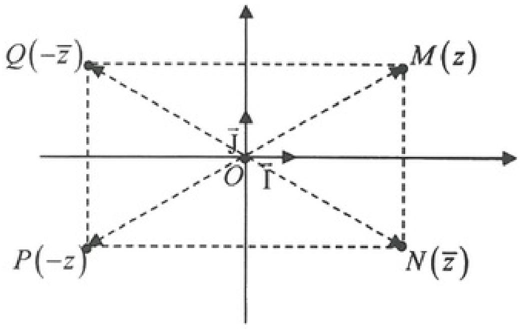
On a alors: $\overline{z} \quad Re \ z \quad iIm \ z$ et $\overline{\overline{z}} \quad z$

Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit $z \quad x \quad iy$ un nombre complexe avec $(x \ \ y) \quad \mathbb{R}$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M \ x \ y$ en $N \ x \quad y$, d'affixe $Aff \ N \quad \overline{Aff \ M}$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M \ x \ y$ en $Q \quad x \ y$, d'affixe $Aff \ Q \quad \overline{Aff \ M}$.



4-2/ Propriétés du conjugué

Proposition 12

Étant donné z $\mathbb{C}$, on a :

$$Re\ z \quad - \quad z \quad \overline{z}$$
$$Im\ z \quad \frac{}{i} \quad z \quad \overline{z}$$
$$z\ \overline{z} \quad Re\ z \quad Im\ z$$

On a donc :

$$z \quad \mathbb{R} \quad \overline{z} \quad z$$
$$z \quad i\mathbb{R} \quad \overline{z} \quad z$$

Remarque

En pratique, pour éliminer les complexes du dénominateur d'une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Proposition 13

Soit z et z deux nombres complexes.

On a alors les propriétés suivantes :

- $\overline{z \quad z} \quad \overline{z} \quad \overline{z}$ et $\overline{z\ z} \quad \overline{z}\ \overline{z}$
- Pour tout λ $\mathbb{R}$: $\overline{\lambda z}$ $\lambda\overline{z}$
- Si z , alors $\overline{\left(\frac{}{z}\right)}$ $\frac{}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z}\right)}$ $\frac{\overline{z}}{\overline{z}}$
- Si z et n $\mathbb{Z}$, alors $\overline{z^n}$ $\overline{z}\ ^n$

Remarques

1- Soit n , et z z z_n des nombres complexes. Alors :

$$\overline{\sum_k^n \quad z_k} \quad \sum_k^n \quad \overline{z_k} \quad et \quad \overline{\prod_k^n \quad z_k} \quad \prod_k^n \quad \overline{z_k}$$

2- Soit $P\ z$ un polynôme dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels :

$$P(z) \quad a_n z^n \quad a_n \quad z^n \quad a\ z \quad a$$

(les nombres a a a_n. an sont alors réels). On a alors pour tout z $\mathbb{C}$:

$$\overline{P\ z} \quad \overline{a_n z^n \quad a_n \quad z^n \quad a\ z \quad a}$$
$$\overline{P\ z} \quad \overline{a_n z^n} \quad \overline{a_n \quad z^n} \quad \overline{a\ z} \quad \overline{a}$$

Puisque pour tout entier k compris entre et n (au sens large) : $\overline{a_k}$ a_k et $\overline{z^k}$ $\overline{z}^{\,k}$

Alors $\overline{P(z)}$ $a_n \overline{z}^{\,n}$ a_n $\overline{z}^{\,n}$ a $\overline{z}$ a $P(\overline{z})$.

En particulier, si α est racine du polynôme P (c'est-à-dire $P(\alpha)$), alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P car : $P(\overline{\alpha})$ $\overline{P(\alpha)}$

On obtient alors le résultat important suivant :

« Si α est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de ce polynôme »

V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 6

Soit z x iy un nombre complexe avec $(x\ y)$ $\mathbb{R}$.

Le module de z est le réel positif noté z défini par : z $\overline{z\ \overline{z}}$ $\sqrt{x\quad y}$

On a alors : z $\overline{\quad Re\ z \qquad Im\ z\quad}$

Remarques

La notion de module prolonge celle de la valeur absolue, c'est-à-dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

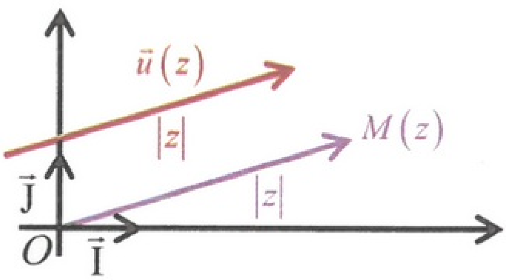
On a pour tout z $\mathbb{C}$: z $z\ \overline{z}$ et z $\overline{z}$. Si z alors : $\overline{z}$ $\frac{z}{z}$

Interprétation géométrique du module

Étant donné z $\mathbb{C}$, d'image M, le module de z est la distance OM :

z OM OM

Si u est un vecteur d'affixe z, alors : z u



Proposition 14

La distance entre deux points A et B, d'affixes respectives a et b, est :

AB AB b a

Proposition 15

Soit a un nombre complexe et r un réel strictement positif. On note A l'image de a.

L'ensemble des images $M \quad z$ des nombres complexes z tels que :

- $z \quad a \quad r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
- $z \quad a \quad r$ est le disque fermé de centre A et de rayon r.
- $z \quad a \quad r$ est le disque ouvert Δ de centre A et de rayon r.

5-2/ Propriétés du module

Proposition 16

Soit z et z deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- z et $Re \quad z \quad z$ et $Im \quad z \quad z$

- $z \quad z$ et $z \quad z \quad z \quad z$

- $z \quad z \quad z \quad z$

- $z \quad \overline{z} \quad z \quad \overline{z}$

Si z et $n \quad \mathbb{Z}$ alors : $\frac{}{z} \quad \frac{}{z}$ et $\frac{z}{z} \quad \frac{z}{z}$ et $z^n \quad z^{\ n}$

Remarque

Si n est un entier supérieur ou égal à , et $z \quad z \quad z_n$ des nombres complexes, alors :

$$\prod_{k}^{n} \quad z_k \qquad \prod_{k}^{n} \quad z_k$$

Proposition 17

Étant donné deux nombres complexes z et z, on a : $z \quad z \quad z \quad z$

C'est l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

VI- Forme trigonométrique d'un complexe

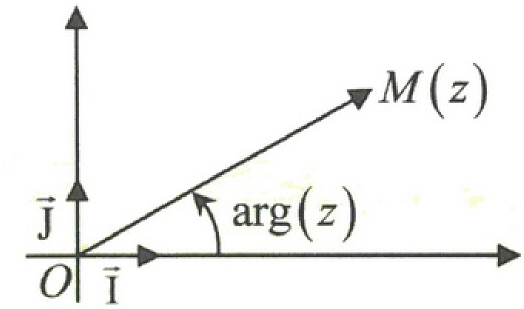
6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 7

Soit z un nombre complexe non nul, d'image M dans le plan complexe .

Toute mesure θ de l'angle orienté $I \quad OM$ s'appelle un argument de z.

On le note $arg \quad z$ et on écrit : $arg \quad z \quad \theta \quad \pi$



Remarques

Soit z un nombre complexe non nul.

Si θ est un argument du nombre complexe z, alors tout nombre réel de la forme $\theta \quad k\pi$ avec $k \quad \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

Dans la pratique, on prend souvent θ dans l'intervalle $\pi \; \pi$, c'est-à-dire la mesure principale de l’angle $I \quad OM$.

Le nombre   est l'unique nombre complexe qui n’a pas d'argument.

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 18

Soit $z \quad x \quad iy$ un nombre complexe non nul avec $(x \; y) \quad \mathbb{R}$ et θ un argument de z.

Alors $x \quad z \quad \theta$ et $y \quad z \quad \theta$.

Tout nombre complexe non nul z s’écrit de manière unique sous la forme $z \quad z \quad \theta \quad i \quad \theta$, où θ est un argument de z.

Définition 8

Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z.

L’écriture $z \quad z \quad \theta \quad i \quad \theta$ est appelée une écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe z.

Notation simplifiée : $z \quad z \quad \theta$

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques.

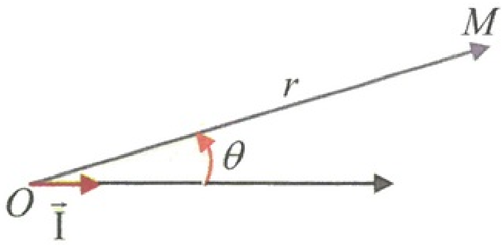
Si $z \quad \mathbb{C}$ alors : $z \quad z \quad arg \; z \quad i \quad arg \; z$

Définition 9

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On pose $r \quad OM$ et θ une mesure de l'angle $I \quad OM \quad arg \; z \quad \theta \quad \pi$.

Le couple $r \quad \theta$ est appelé le couple des coordonnées polaires du point M par rapport à l'axe polaire $O \quad I$. Le point O est le pôle



Proposition 19

Soit $z \quad \mathbb{C}$.

Si $z \quad r \quad \theta \quad i \quad \theta$ tel que $r \quad \mathbb{R}$ et $\theta \quad \mathbb{R}$, alors : $z \quad r$ et $\theta \quad arg \; z \quad \pi$

Proposition 20

Soit z un nombre complexe non nul.

On a les équivalences suivantes :

$$z \quad \mathbb{R} \quad arg \; z \quad \pi$$
$$z \quad \mathbb{R} \quad arg \; z \quad \pi$$
$$z \quad \mathbb{R} \quad arg \; z \quad \pi \quad \pi$$
$$\mathbb{R} \quad \frac{\pi}{} \; \pi$$
$$\mathbb{R} \quad \frac{\pi}{} \; \pi$$
$$\mathbb{R} \quad \frac{\pi}{} \; \pi$$

Remarques

1- Les propositions 18 et 19 nous indiquent que toute écriture du genre $r \quad \theta \quad i \quad \theta$ avec $r \quad \mathbb{R}$ et $\theta \quad \mathbb{R}$ est une forme géométrique d'un nombre complexe de module r et d'argument θ.

2- La proposition 20 nous facilite la détermination d'une forme trigonométrique d'un nombre réel ou imaginaire pur. En effet, si x est un nombre réel strictement positif, alors :

3- La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul z est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments. Pratiquement :

Si $z \quad x \quad iy$ avec $(x \quad y) \quad \mathbb{R}$ alors $z \quad \sqrt{x \quad y}$, et donc :

$$\frac{z}{z} \quad \frac{x}{\sqrt{x \quad y}} \quad i\frac{y}{\sqrt{x \quad y}}$$

Et si $arg \; z \quad \theta \quad \pi$ alors $z \quad z \quad \theta \quad i \quad \theta$, et donc :

$$\frac{z}{z} \quad \theta \quad i \quad \theta$$

Par conséquent : $\theta \quad \frac{x}{\sqrt{x \quad y}}$ et $\theta \quad \frac{y}{\sqrt{x \quad y}}$

Ainsi, la connaissance de θ et θ permet la détermination d'un argument de z. (On pourra utiliser les boutons et de la calculatrice).

4- Si $z \quad \lambda \quad \theta \quad i \quad \theta$ avec $\lambda \quad \mathbb{R}$ alors $z \quad \lambda$. Par suite :
$z \quad \lambda \quad \theta \quad \pi \quad i \quad \theta \quad \pi$ est une forme trigonométrique du nombre z.

Proposition 21

Pour des nombres complexes non nuls z et z, on a :

$$z \quad z \quad z \quad z \ et \ arg \ z \quad arg \ z \quad \pi$$
$$z \quad \overline{z} \quad z \quad z \ et \ arg \ z \quad arg \ z \quad \pi$$
$$z \quad z \quad z \quad z \ et \ arg \ z \quad \pi \quad arg \ z \quad \pi$$

Corollaire

Soit z un nombre complexe non nul.

Si $z \quad r \ \theta$ alors : $\overline{z} \quad r \ \theta$ et $z \quad r \ \pi \quad \theta$.

En particulier, on a : $arg \ \overline{z} \quad arg \ z \quad \pi$ et $arg \quad z \quad \pi \quad arg \ z \quad \pi$

Proposition 22

Soient z et z deux nombres complexes non nuis tels que $z \quad r \ \theta$ et $z \quad r \ \theta$

On a les relations suivantes :

$$zz \quad \left[rr \ \theta \quad \theta\right] \ et \ arg \ zz \quad arg \ z \quad \pi$$
$$\frac{}{z} \quad \left[\frac{}{r} \quad \theta\right] \ et \ arg\left(\frac{}{z}\right) \quad \pi$$
$$\frac{z}{z} \quad \left[\frac{r}{r} \ \theta \quad \theta\right] \ et \ arg\left(\frac{z}{z}\right) \quad \pi$$
$$n \quad \mathbb{Z} \ z^n \quad \left[r^n \ n\theta\right] \ et \ arg \ z^n \quad narg \ z \quad \pi$$

Remarques

Soit n un entier supérieur ou égal à , et $z \quad z \quad z_n$z, , z2 ,.. zn des nombres complexes non nuis. Alors :

$$arg\left(\prod_k^n \quad z_k\right) \quad \sum_k^n \quad arg \ z_k \quad \pi$$

Si z et z sont deux nombres complexes non nuls tels que $z \quad z$, alors on n'a pas en général $arg \ z \quad z \quad arg \ z \quad arg \ z \quad \pi$.

Contre-exemple :

$$arg \quad arg \ i \quad \frac{\pi}{} \quad \pi \text{ et } arg \quad i \quad \frac{\pi}{} \quad \pi \text{ et } \frac{\pi}{} \quad \frac{\pi}{} \quad \pi$$

Soit z et z deux nombres complexes non nuls, et soit M et M leurs images

respectives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $O \ I \quad J$

À partir de la proposition 22, on peut déduire que le point $P \ z \ z$ est le point du plan complexe tel que :

$$OP \quad OM \quad OM \text{ et } I \quad OP \quad I \quad OM \quad I \quad OM \quad \pi$$

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

Proposition 23

Soit u et v deux vecteurs non nuis d'affixes respectives z et z, et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B , $z_C$et z_D tels que $A \quad B$ et $C \quad D$.

Alors le nombre complexe $\frac{z}{z}$ a pour argument toute mesure de l'angle $u \quad v$.

Ainsi :

1- $I \quad u \qquad arg \; z \qquad \pi$ et $I \quad AB \qquad arg \; z_B \quad z_A \qquad \pi$ (argument de l'affixe

du vecteur AB).

2- $u \quad v \qquad arg\left(\frac{z}{z}\right) \qquad \pi$ et $AB \; CD \qquad arg \; \frac{z_D \;\; z_C}{z_B \;\; z_A} \qquad \pi$

Proposition 24

Soit u et v deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z, et soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B , $z_C$et z_D. On a :

1- Les vecteurs u et v sont colinéaires si, et seulement si,
$arg\left(\frac{z}{z}\right) \qquad \pi \quad (- \qquad \mathbb{R})$

Et : $AB \qquad CD \qquad arg \; \frac{z_D \;\; z_C}{z_B \;\; z_A} \qquad\qquad \pi$

2- Les vecteurs u et v sont orthogonaux si, et seulement si,
$arg\left(\frac{z}{z}\right) \quad \frac{\pi}{} \; \pi \quad (- \qquad i\mathbb{R})$

Et : $AB \qquad CD \qquad arg \; \frac{z_D \;\; z_C}{z_B \;\; z_A} \qquad \frac{\pi}{} \qquad \pi$

3- Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si : $\frac{z_C \;\; z_A}{z_B \;\; z_A} \qquad \frac{z_C \;\; z_D}{z_B \;\; z_D} \qquad \mathbb{R}$

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 10

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module et d'argument θ.

Autrement dit : $e^{i\theta} \qquad\qquad \theta \quad i \qquad \theta$

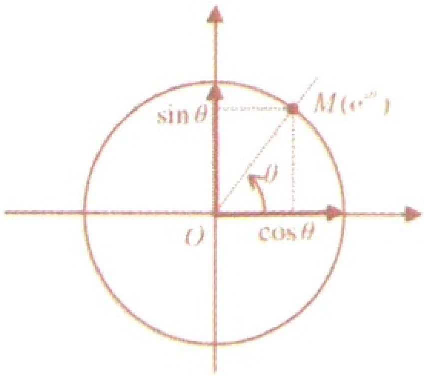
Remarques

D'après la définition 10, les nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \quad \mathbb{R}$) sont les affixes des points du plan complexe situés sur le cercle trigonométrique, et inversement, tout point du cercle trigonométrique a une affixe de la forme $e^{i\theta}$

(avec θ $\mathbb{R}$).

Par convention, on écrit pour tout θ $\mathbb{R}$: $e^{i\quad\theta}$ $e^{i\theta}$

Lorsque θ , alors on a $e^{i\theta}$; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en la fonction exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.



Proposition 25

Soit θ et θ deux nombres réels. Alors :

$$e^{i\theta} \qquad et\ arg\left(e^{i\theta}\right) \quad \theta \quad \pi$$

$$e^{i\theta} \quad e^{i\theta} \quad e^{i\ \theta\ \theta}$$

$$e^{\ i\theta} \quad \frac{}{e^{i\theta}} \quad \frac{}{\overline{e^{i\theta}}} \qquad \theta \quad i \quad \theta$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta}} \quad e^{i\ \theta\ \theta}$$

$$e^{i\ \theta} \quad e^{i\ \theta} \qquad \theta \quad \theta \quad \pi$$

$$e^{i\theta} \quad e^{i\ \theta\ \pi}$$

Définition 11

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.

L'écriture z $re^{i\theta}$ est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre z.

Proposition 26

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n$ $e^{in\theta}$, ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$\theta \quad i \quad \theta^{\ n} \qquad n\theta \quad i \quad n\theta$$

« Formule de Moivre »

Pour tout réel θ :

$$\theta \quad \frac{e^{i\theta} \quad e^{\ i\theta}}{} \ et \qquad \theta \quad \frac{e^{i\theta} \quad e^{\ i\theta}}{i}$$

« Formules d'Euler »