Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 6-1-1 : Nombres complexes - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

I- L'ensemble des nombres complexes

1-1/ Notion de nombre complexe

Théorème 1

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$:

1- muni d'une addition notée $+$ et d'une multiplication notée x, ou le plus souvent implicitement (c'est-à-dire sans symbole, comme dans $\mathbb{R}$) possédant les mêmes propriétés comme dans $\mathbb{R}$.

2- possédant un élément noté i dont le carré vaut -1 : $i^2 = -1$.

3- où tout élément z, appelé nombre complexe ou complexe, s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$, avec x et y réels.

Remarques

- On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.

- Contrairement à $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'est usuellement muni d'aucune relation d'ordre, et nous ne pourrons donc pas dire qu'un nombre complexe est inférieur à un autre ou non plus qu'il est positif.

- Les nombres complexes $x + iy$ et $x + yi$ où $\left(x; y\right) \in \mathbb{R}^2$ représentent le même nombre complexe.

- On a : $\mathbb{C} = \left\{x + iy / \left(x; y\right) \in \mathbb{R}^2\right\}$

1-2/ Forme algébrique d'un nombre complexe

Définition 1

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $\left(x; y\right) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

L'écriture $x + iy$ s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z.

Le nombre x est la partie réelle de z notée $Re(z)$.

Le nombre y est la partie imaginaire de z notée $Im(z)$.

Un nombre complexe est réel lorsque sa partie imaginaire est nulle : $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$.

Un nombre complexe est dit imaginaire pur si sa partie réelle est nulle :$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$.

1-3/ Égalité de deux nombres complexes

Proposition 1

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

En d'autres termes :

$$\left(\forall\left(z ; z'\right) \in \mathbb{C}^{2}\right) \;\; z=z' \Leftrightarrow\left(Re(z)=Re\left(z'\right)\right) \; et \;\left(Im(z)=Im\left(z'\right)\right)$$

Remarques

Le résultat de la proposition 1 est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe z :

$$\left(\forall\left(z ; z'\right) \in \mathbb{C}^{2}\right) \;\; z=z' \Leftrightarrow\left(Re(z)=Re\left(z'\right)\right) \; et \;\left(Im(z)=Im\left(z'\right)\right)$$

II- Opérations sur les nombres complexes

2-1/ Addition et multiplication dans $\mathbb{C}$

Proposition 2

Soit z et z' deux nombres complexes tels que : $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ avec $\left(x ; x' ; y ; y'\right) \in \mathbb{R}^{4}$.

On a :

1- $z+z'=\left(x+x'\right)+i\left(y+y'\right)$ et $z \times z'=xx'-yy'+i\left(xy'+yx'\right)$

2- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \;:\; \lambda z=\lambda x+i(\lambda y)$

Remarques

Pour tout $\left(z ; z'\right) \in \mathbb{C}^{2}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{cases} Re\left(z+z'\right)=Re(z)+Re\left(z'\right) \\ Im\left(z+z'\right)=Im(z)+Im\left(z'\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases} Re(\lambda z)=\lambda Re(z) \\ Im(\lambda z)=\lambda Im(z)\end{cases}$$

Si $k \in \mathbb{N}$, alors $i^{2k}=\left(i^{2}\right)^{k}=(-1)^{k}$. Il en résulte donc :

$$i^{4k}=1 \;;\; i^{4k+1}=i \;;\; i^{4k+2}=-1 \;;\; i^{4k+3}=-i$$

2-2/ Opposé d'un complexe - différence de deux complexes

Proposition 3

Tout nombre complexe $z=x+iy$, où x et y sont des réels, possède un opposé dans $\mathbb{C}$ noté $-z$, qui est le nombre complexe $-x-iy$, et on écrit $-z=-x-iy$.

Donc :

$$Re(-z)=-Re(z) \; et \; Im(-z)=-Im(z)$$

Définition 2

La différence de deux nombres complexes z et z' est le nombre $z-z'=z+\left(-z'\right)$.

Remarques

Si x, x', y et y' sont des nombres réels, alors : $(x+iy)-\left(x'+iy'\right)=\left(x-x'\right)+i\left(y-y'\right)$

Les identités remarquables vues dans $\mathbb{R}$ restent aussi valables dans $\mathbb{C}$.

Ainsi, pour tous nombres complexes z_1 et z_2 on a :

$$\left(z_1+z_2\right)^2={z_1}^2+2z_1z_2+{z_2}^2$$
$$\left(z_1-z_2\right)^2={z_1}^2-2z_1z_2+{z_2}^2$$
$$\left(z_1+z_2\right)\left(z_1-z_2\right)={z_1}^2-{z_2}^2$$

En particulier, on a les égalités suivantes, valables pour tout $\left(a;b\right)\in\mathbb{R}^2$:

$$\left(a+ib\right)^2=a^2-b^2+2abi$$
$$\left(a-ib\right)^2=a^2-b^2-2abi$$
$$\left(a+ib\right)\left(a-ib\right)=a^2-b^2$$

On a aussi :

$$\left(z_1+z_2\right)^3={z_1}^3+3{z_1}^2z_2+3z_1{z_2}^2+{z_2}^3$$
$$\left(z_1+z_2\right)^3={z_1}^3-3{z_1}^2z_2+3z_1{z_2}^2-{z_2}^3$$
$${z_1}^3-{z_2}^3=\left(z_1-z_2\right)\left({z_1}^2+z_1z_2+{z_2}^2\right)$$
$${z_1}^3+{z_2}^3=\left(z_1+z_2\right)\left({z_1}^2-z_1z_2+{z_2}^2\right)$$

Et de façon générale, on a pour tout $(z_1;z_2)\in\mathbb{C}^2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\left(z_1+z_2\right)^n=\sum_{p=0}^{n}C_n^p.{z_1}^p.{z_2}^{n-p}=\sum_{q=0}^{n}C_n^q.{z_2}^q.{z_1}^{n-q}\ \text{(Formule du binôme de Newton)}$$
$${z_1}^n-{z_2}^n=(z_1-z_2)\left({z_1}^{n-1}-{z_1}^{n-2}z_2+\ldots+z_1{z_2}^{n-2}+{z_2}^{n-1}\right)$$
$${z_1}^n-{z_2}^n=(z_1-z_2)\left(\sum_{k=0}^{n-1}{z_1}^{n-k-1}{z_2}^k\right)$$

Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

En particulier :

$$\forall\,(z;z')\in\mathbb{C}^2\ \left[z\times z'=0\Leftrightarrow(z=0\ ou\ z'=0)\right]$$

2-3/ Inverse d'un nombre complexe non nul - quotient de deux nombres complexes

Proposition 4

Soit $z=x+iy$ un nombre complexe non nul tels que $\left(x;y\right)\in\mathbb{R}^2-\left\{(0,0)\right\}$.

L'inverse du nombre z est le nombre complexe noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} tel que :

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{x^2+y^2}\left(x-iy\right)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Proposition 5

Soit $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ deux complexes où x, x', y et y' des réels tels que $(x;y)\neq(0;0)$.

Le quotient de z' par z est le nombre complexe noté $\frac{z'}{z}$ tel que $\frac{z'}{z}=z'\times\frac{1}{z}$, et on a :

$$\frac{z'}{z}=\frac{x'+iy'}{x+iy}=\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2}+i\frac{xy'-yx'}{x^2+y^2}$$

III- Représentation géométrique d'un nombre complexe

3-1/ Affixe d'un point - affixe d'un vecteur

Définition 3

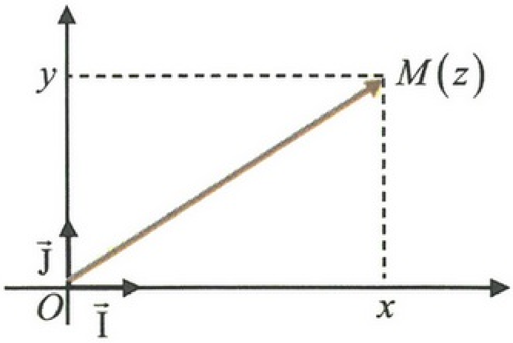
Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$.

Soit $z = x + iy$ où $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.

L'unique point M, de coordonnées $(x;y)$ dans $\left(O;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$, est appelé l'image du complexe z, et on écrit $M(z)$.

Soit M un point, de coordonnées $(x;y)$ dans $\left(O;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$.

Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé l'affixe du point M. On le note $Aff(M)$ ou z_M.



Remarques

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$.

À partir de la définition 3, on peut identifier l'ensemble au plan de la façon suivante :

- À tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le point $M(x;y)$.
- À tout point $M(x;y)$ du plan $\mathscr{P}$ on associe le nombre complexe $z = x + iy$.

Ainsi, l'application $f : \mathbb{C} \to \mathscr{P}$
$z \to M(z)$ est une bijection. Sa bijection réciproque est : $f^{-1} : \mathscr{P} \to \mathbb{C}$
$M \to Aff(M)$

Le plan $\mathscr{P}$ est appelé alors le plan complexe, et on a :

$$\left(\forall (M;N) \in \mathscr{P}^2\right)\ \left(Aff(M) = Aff(N) \Leftrightarrow M = N\right)$$

Tout point de l'axe des abscisses est l'image d'un nombre réel, c'est pourquoi l'axe des abscisses
s'appelle l'axe réel. On a alors : $M(z) \in \left(O;\overrightarrow{I}\right) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Tout point $B(0;b)$ de l'axe des ordonnées est l'image d'un nombre imaginaire pur $(Aff(B) = bi)$, c'est pourquoi l'axe des ordonnées s'appelle l'axe imaginaire. On a alors : $M(z) \in \left(O;\overrightarrow{J}\right) \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Définition 4

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\overrightarrow{I},\overrightarrow{J}\right)$.

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe où .

Le vecteur $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{I} + y.\overrightarrow{J}$ est appelé image du complexe z, et on écrit $\overrightarrow{u}(z)$.

De même, le nombre z est appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{u}$, et on écrit $Aff\left(\overrightarrow{u}\right) = z$ ou parfois $z_{\overrightarrow{u}} = z$.

Remarques

Soit z un nombre complexe.

On a : $z = Aff\,(M) \Leftrightarrow z = Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$

Soit $\mathscr{V}_2$ l'ensemble des vecteurs du plan.

L'application $g : \mathbb{C} \to \mathscr{V}_2$

$z \mapsto \overrightarrow{w}\,(z)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathscr{V}_2$, et on a :

$$\left(\forall\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right) \in \mathscr{V}_2{}^2\right)\left(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \Leftrightarrow Aff\left(\overrightarrow{u}\right) = Aff\left(\overrightarrow{v}\right)\right)$$

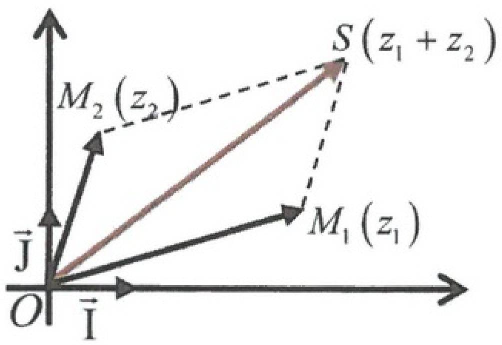
3-2/ Interprétation géométrique de la somme, la différence et la multiplication par un réel

Proposition 6

Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ est $z_1 + z_2$.

En d'autres termes : $Aff\left(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}\right) = Aff\left(\overrightarrow{v_1}\right) + Aff\left(\overrightarrow{v_2}\right)$.

Si M_1 et M_2 sont les images respectives des affixes z_1 et z_2, alors l'image du nombre $z_1 + z_2$ est le point S tel que : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ (C'est-à-dire OM_1SM_2 est un parallélogramme).



Remarques

Soit z un nombre complexe et $\overrightarrow{u}\left(z\right)$ et $\overrightarrow{v}\left(-z\right)$ deux vecteurs du plan.

On sait que $Aff\left(\overrightarrow{0}\right) = 0$ et $z + (-z) = 0$, donc d'après la proposition 6, on en déduit que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

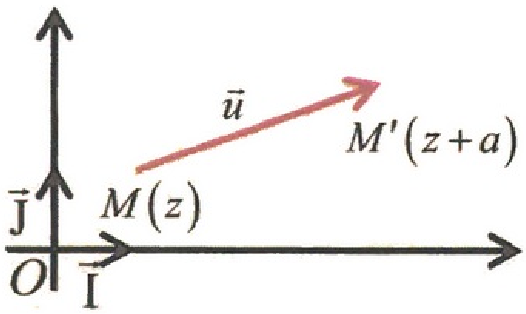
Ainsi $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{u}$ et alors : $Aff\left(-\overrightarrow{u}\right) = -Aff\left(\overrightarrow{u}\right)$.

Soit $M(z)$ et $M'(-z)$. Comme $O(0)$ et $z + (-z) = 0$, alors $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{0}$, et par suite $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Ainsi, le point $M'(-z)$ est le symétrique de point $M(z)$ par rapport à O.

On peut aussi interpréter géométriquement l'addition de la manière suivante :

Étant donné un vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe a, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ transforme le point M d'affixe z, en le point M' d'affixe $z' = z + a$.

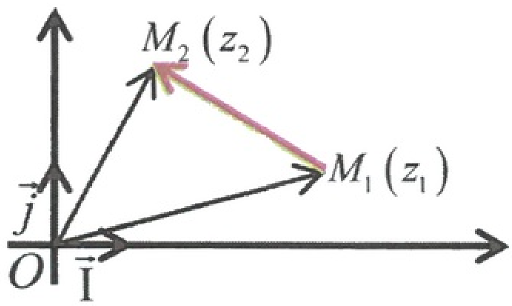


Proposition 7

Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan complexe.

Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est $z_2 - z_1$.

En d'autres termes : $Aff\left(\overrightarrow{M_1M_2}\right) = Aff(M_2) - Aff(M_1)$

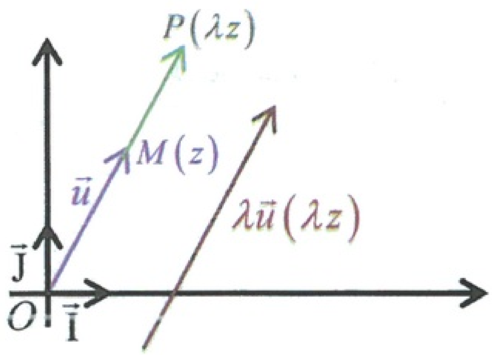


Proposition 8

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur d'affixe z et λ un nombre réel, alors l'affixe du vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ est λz.

En d'autres termes : $Aff\left(\lambda\overrightarrow{u}\right) = \lambda.Aff\left(\overrightarrow{u}\right)$

Si $M(z)$ est un point du plan, alors l'image du nombre complexe λz est le point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OM}$.



Remarque

A l'aide des propositions 6 et 8, on peut établir le résultat suivant :

Si $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux vecteurs du plan, alors pour tout $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$Aff\left(\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2}\right) = \lambda_1 Aff\left(\overrightarrow{v_1}\right) + \lambda_2 Aff\left(\overrightarrow{v_2}\right)$$

3-3/ Interprétation complexe de la linéarité, du parallélisme et du barycentre

Proposition 9

Soient A, B et C des points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A, z_B et z_C.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Proposition 10

Soient A, B, C et D quatre points du plan d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si : $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Proposition 11

Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, et soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha + \beta \neq 0$.

L'affixe du barycentre G du système pondéré $\{(a;\alpha);(B;\beta)\}$ est le complexe : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$

Remarques

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ alors l'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est le nombre complexe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

En fait ceci n'est rien qu'un cas particulier du barycentre où les « poids » sont égaux.

On peut généraliser le résultat de la proposition 11 pour le barycentre de plus de deux points.

Plus précisément : si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \neq 0$, alors le barycentre G du système pondéré $\{(A_1;\alpha_1),(A_2;\alpha_2),\ldots,(A_n;\alpha_n)\}$ a pour affixe :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_{A_1} + \alpha_2 z_{A2} + \ldots + \alpha_n z_{An}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

IV- Conjugué d'un nombre complexe

4-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 5

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe $x - iy$, noté $\overline{z}$, et on écrit : $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

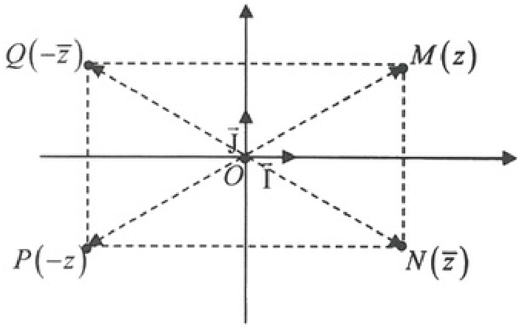
On a alors: $\overline{z} = Re(z) - iIm(z)$ et $\overline{\overline{z}} = z$

Interprétation géométrique de la conjugaison

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M(x;y)$ en $N(x;-y)$, d'affixe $Aff(N) = \overline{Aff(M)}$.

La symétrie par rapport à l'axe des abscisses transforme le point $M(x;y)$ en $Q(-x;y)$, d'affixe $Aff\left(Q\right) = -\overline{Aff(M)}$.



4-2/ Propriétés du conjugué

Proposition 12

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$Re\,(z) = \frac{1}{2}\,(z + \overline{z})$$
$$Im\,(z) = \frac{1}{2i}\,(z - \overline{z})$$
$$z.\,\overline{z} = (Re\,(z))^2 + (Im\,(z))^2$$

On a donc :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$$
$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$$

Remarque

En pratique, pour éliminer les complexes du dénominateur d'une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Proposition 13

Soit z et z' deux nombres complexes.

On a alors les propriétés suivantes :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{z.\,z'} = \overline{z}.\,\overline{z'}$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$
- Si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$

Remarques

1- Soit $n \geq 2$, et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes. Alors :

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \quad et \quad \overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

2- Soit $P(z)$ un polynôme dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels : $P\left(z\right) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ (les nombres $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$. an sont alors réels). On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$$
$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}$$

Puisque pour tout entier k compris entre 1 et n (au sens large) : $\overline{a_k} = a_k$ et $\overline{z^k} = (\overline{z})^k$

Alors $\overline{P(z)} = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \ldots + a_1\overline{z} + a_0 = P\left(\overline{z}\right)$.

En particulier, si α est racine du polynôme P (c'est-à-dire $P(\alpha) = 0$), alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de P car : $P\left(\overline{\alpha}\right) = \overline{P(\alpha)} = 0$

On obtient alors le résultat important suivant :

« Si α est racine d'un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{\alpha}$ est aussi racine de ce polynôme »

V- Module d'un nombre complexe

5-1/ Définition et interprétation géométrique

Définition 6

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$.

Le module de z est le réel positif noté $|z|$ défini par : $|z| = \sqrt{z.\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

On a alors : $|z| = \sqrt{(Re\,(z))^2 + (Im\,(z))^2}$

Remarques

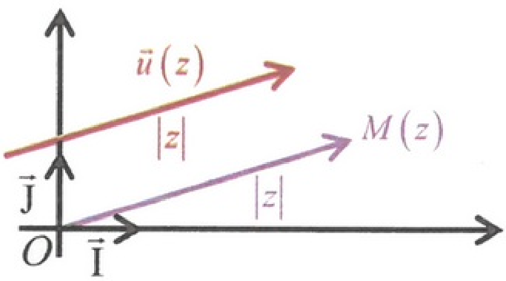
La notion de module prolonge celle de la valeur absolue, c'est-à-dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

On a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z|^2 = z.\overline{z}$ et $|z| = |\overline{z}|$. Si $z \neq 0$ alors : $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$

Interprétation géométrique du module

Étant donné $z \in \mathbb{C}$, d'image M, le module de z est la distance OM : $|z| = ||\overrightarrow{OM}|| = OM$

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur d'affixe z, alors : $|z| = ||\overrightarrow{u}||$



Proposition 14

La distance entre deux points A et B, d'affixes respectives a et b, est : $||\overrightarrow{AB}|| = AB = |b - a|$

Proposition 15

Soit a un nombre complexe et r un réel strictement positif. On note A l'image de a.

L'ensemble des images $M(z)$ des nombres complexes z tels que :

- $|z - a| = r$ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r.
- $|z - a| \leq r$ est le disque fermé $\mathscr{D}$ de centre A et de rayon r.
- $|z - a| < r$ est le disque ouvert Δ de centre A et de rayon r.

5-2/ Propriétés du module

Proposition 16

Soit z et z' deux nombres complexes. On a les propriétés suivantes :

- $|z| \geq 0$ et $|Re(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $|z - z'| = 0 \Leftrightarrow z = z'$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$

Si $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors : $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ et $|z^n| = |z|^n$

Remarque

Si n est un entier supérieur ou égal à 2, et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des nombres complexes, alors :

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|$$

Proposition 17

Étant donné deux nombres complexes z et z', on a : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

C'est l'inégalité triangulaire pour les nombres complexes.

VI- Forme trigonométrique d'un complexe

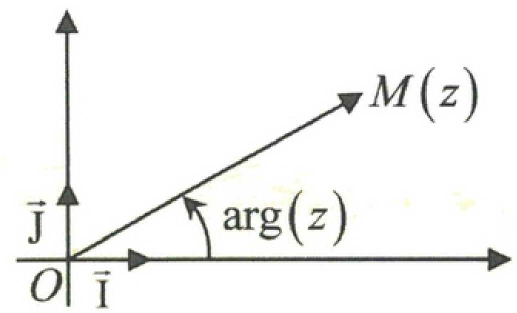
6-1/ Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 7

Soit z un nombre complexe non nul, d'image M dans le plan complexe $\mathscr{P}$.

Toute mesure θ de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{I}\,;\overrightarrow{OM}}\right)$ s'appelle un argument de z.

On le note $arg(z)$ et on écrit : $arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$



Remarques

Soit z un nombre complexe non nul.

Si θ est un argument du nombre complexe z, alors tout nombre réel de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est aussi un argument de z.

Dans la pratique, on prend souvent θ dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, c'est-à-dire la mesure principale de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{I}\,;\overrightarrow{OM}}\right)$.

Le nombre 0 est l'unique nombre complexe qui n'a pas d'argument.

6-2/ Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 18

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ et θ un argument de z.

Alors $x = |z| \cos\theta$ et $y = |z| \sin\theta$.

Tout nombre complexe non nul z s'écrit de manière unique sous la forme
$z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$, où θ est un argument de z.

Définition 8

Soit z un nombre complexe non nul et θ un argument de z.

L'écriture $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$ est appelée une écriture trigonométrique ou forme trigonométrique du nombre complexe z.

Notation simplifiée : $z = [|z|; \theta]$

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet une infinité de formes trigonométriques.

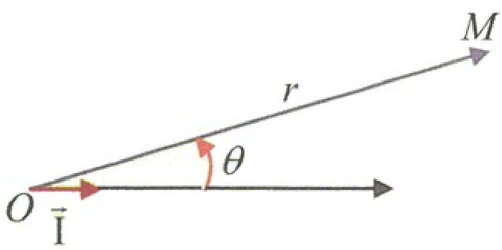
Si $z \in \mathbb{C}^*$ alors : $z = |z|(\cos(arg(z)) + i \sin(arg(z)))$

Définition 9

Soit z un nombre complexe non nul et M son image dans le plan complexe.

On pose $r = OM$ et θ une mesure de l'angle $\left(\widehat{\vec{I}\,; \overrightarrow{OM}}\right)$ $(arg(z) \equiv \theta\,[2\pi])$.

Le couple $(r; \theta)$ est appelé le couple des coordonnées polaires du point M par rapport à l'axe polaire $\left(O; \vec{I}\right)$. Le point O est le pôle



Proposition 19

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Si $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ tel que $r \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors : $|z| = r$ et $\theta \equiv arg(z)\,[2\pi]$

Proposition 20

Soit z un nombre complexe non nul.

On a les équivalences suivantes :

$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0\,[\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv 0\,[2\pi]$$
$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow arg(z) \equiv \pi\,[2\pi]$$

$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$
$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$$

Remarques

1- Les propositions 18 et 19 nous indiquent que toute écriture du genre $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ est une forme géométrique d'un nombre complexe de module r et d'argument θ.

2- La proposition 20 nous facilite la détermination d'une forme trigonométrique d'un nombre réel ou imaginaire pur. En effet, si x est un nombre réel strictement positif, alors :

3- La détermination d'une écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul z est équivalente à la détermination de son module et d'un de ces arguments. Pratiquement :

Si $z = x + iy$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ alors $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, et donc :

$$\frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Et si $arg\,(z) \equiv \theta\,[2\pi]$ alors $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, et donc :

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Par conséquent : $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Ainsi, la connaissance de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ permet la détermination d'un argument de z. (On pourra utiliser les boutons $\cos^{-1}$ et $\sin^{-1}$ de la calculatrice).

4- Si $z = \lambda(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$ alors $|z| = -\lambda$. Par suite :
$z = |\lambda|(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi))$ est une forme trigonométrique du nombre z.

Proposition 21

Pour des nombres complexes non nuls z et z', on a :

$$z' = z \Leftrightarrow (|z'| = |z| \; et \; arg\,(z') \equiv arg\,(z)\,[2\pi])$$
$$z' = \overline{z} \Leftrightarrow (|z'| = |z| \; et \; arg\,(z') \equiv -arg\,(z)\,[2\pi])$$
$$z' = -z \Leftrightarrow (|z'| = |z| \; et \; arg\,(z') \equiv \pi + arg\,(z)\,[2\pi])$$

Corollaire

Soit z un nombre complexe non nul.

Si $z = [r,\theta]$ alors : $\overline{z} = [r,-\theta]$ et $-z = [r,\pi+\theta]$.

En particulier, on a : $arg\,(\overline{z}) \equiv -arg\,(z)\,[2\pi]$ et $arg\,(-z) \equiv \pi + arg\,(z)\,[2\pi]$

Proposition 22

Soient z et z' deux nombres complexes non nuis tels que $z = [r,\theta]$ et $z' = [r',\theta']$

On a les relations suivantes :

$$1 \;\; zz' = [rr', \theta+\theta'] \;\; et \;\; arg\,(zz') \equiv \arg(z) + arg\,(z')\,[2\pi]$$
$$2 \;\; \frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}; -\theta\right] \;\; et \;\; arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$$
$$3 \;\; \frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}; \theta-\theta'\right] \;\; et \;\; arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$$

$$4\ \ (\forall n \in \mathbb{Z})\ z^n = \left[r^n, n\theta\right]\ \ et\ \ arg\left(z^n\right) \equiv narg\left(z\right)[2\pi]$$

Remarques

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $z_1, z_2, \ldots, z_n$z, , z2 ,.. zn des nombres complexes non nuis. Alors :

$$arg\left(\prod_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} arg\left(z_k\right)\ [2\pi]$$

Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que $z_1 + z_2 \neq 0$, alors on n'a pas en général $arg\left(z_1 + z_2\right) \equiv arg\left(z_1\right) + arg\left(z_2\right)[2\pi]$.

Contre-exemple :

$$arg\left(1\right) + arg\left(i\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \text{ et } arg\left(1+i\right) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \text{ et } \frac{\pi}{2} \not\equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$$

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, et soit M et M' leurs images respectives dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O; \overrightarrow{I}; \overrightarrow{J}\right)$

À partir de la proposition 22, on peut déduire que le point $P(z.z')$ est le point du plan complexe tel que :

$$OP = OM \times OM' \text{ et } \left(\widehat{\overrightarrow{I}; \overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{I}; \overrightarrow{OM}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{I}; \overrightarrow{OM'}}\right)\ [2\pi]$$

6-3/ Angle de deux vecteurs et argument d'un complexe

Proposition 23

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuis d'affixes respectives z et z', et soit A, B, C et D des points du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B , $z_C$et z_D tels que $A \neq B$ et $C \neq D$.

Alors le nombre complexe $\frac{z'}{z}$ a pour argument toute mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right)$. Ainsi :

1- $\left(\widehat{\overrightarrow{I}; \overrightarrow{u}}\right) \equiv arg\left(z\right)\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{I}; \overrightarrow{AB}}\right) \equiv arg\left(z_B - z_A\right)\ [2\pi]$ (argument de l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$).

2- $\left(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}}\right) \equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}}\right) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

Proposition 24

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives z et z', et soit A, B, C et D des points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes respectives z_A, z_B , $z_C$et z_D. On a :

1- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv 0\,[\pi]\ \left(\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}\right)$

Et : $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0\ \ [2\pi]$

2- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]\ \left(\frac{z'}{z} \in i\mathbb{R}\right)$

Et : $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ \ [2\pi]$

3- Les points A, B, C et D sont alignés ou cocycliques (appartenant au même cercle) si, et seulement si : $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \div \frac{z_C - z_D}{z_B - z_D}\right) \in \mathbb{R}$

6-4/ Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Définition 10

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

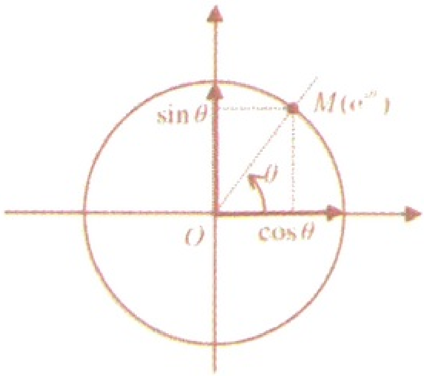
Autrement dit : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarques

D'après la définition 10, les nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$) sont les affixes des points du plan complexe situés sur le cercle trigonométrique, et inversement, tout point du cercle trigonométrique a une affixe de la forme $e^{i\theta}$ (avec $\theta \in \mathbb{R}$).

Par convention, on écrit pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $e^{i(-\theta)} = e^{i\theta}$

Lorsque $\theta = 0$, alors on a $e^{i\theta} = 1$; ainsi, cette nouvelle définition est donc compatible avec la valeur que donne en 0 la fonction exponentielle déjà connue sur $\mathbb{R}$.



Proposition 25

Soit θ et θ' deux nombres réels. Alors :

$$1 \quad \left|e^{i\theta}\right| = 1 \; et \; arg\left(e^{i\theta}\right) \equiv \theta \; [2\pi]$$
$$2 \quad e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$
$$3 \quad e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$4 \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$
$$5 \quad e^{i(\theta)} = e^{i(\theta')} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' \; [2\pi]$$
$$6 \quad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

Définition 11

Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument θ.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée la notation exponentielle ou l'écriture exponentielle du nombre z.

Proposition 26

Pour tout réel θ et pour tout entier relatif n, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, ou encore, par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

« Formule de Moivre »

Pour tout réel θ :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \; et \; \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

« Formules d'Euler »