

I- Exercice 1 (7 pts)

On considère la fonction numérique f_n définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2} \ln x \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n .
2. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 \leq \alpha_n \leq e^2$
4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n) = e^2$.

II- Exercice 2 (10 pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est continue à droite en 0.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Étudier les variations de la fonction f .
5. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
6. Tracer la courbe \mathcal{C} .

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [\frac{1}{e}; e]$.

7. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
8. Montrer que g^{-1} est dérivable en 0, puis déterminer $(g^{-1})'(0)$.

III- Exercice 3 (3 pts)

1. Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \quad f(x) &= \frac{1}{x^2 - 4x + 6} \\ 2 \quad g(x) &= \frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4x + 6} \end{aligned}$$

