Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 2 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (7 pts)

On considère ta fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x \ \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Étudier les variations de la fonction f_n.
2. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \ : \ 1 \leq \alpha_n \leq e^2$
4. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n) = e^2$.

II- Exercice 2 (10 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x + \ln x + 1} \ si \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (x)$.
2. Montrer que f est continue à droite en 0.
3. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Étudier les variations de la fonction f.
5. Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[\frac{1}{e}; e\right]$.

7. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer.
8. Montrer que g^{-1} est dérivable en 0, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

III- Exercice 3 (3 pts)

1. Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

$$1 \ \ f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 6}$$
$$2 \ \ g(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 1}{x^2 - 4x + 6}$$