AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 5-1-2 : Fonctions exponentielles - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan muni d' un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.
2. Étudier la branche infinie de $(\mathscr{C}_n)$ au voisinage de $-\infty$.
3. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe au voisinage de $(\mathscr{C}_n)$, puis déterminer la position relative de $(\mathscr{C}_n)$ et (D).
4. Étudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.
5. Construire la courbe $(\mathscr{C}_3)$. (On prend $f_3(-0,6) \approx 0$ et $f_3(-1,5) \approx 0$ et $\ln 3 \approx 1,1$).
6. Montrer que pour $n \geq 3$ on a : $\frac{e}{n} < \ln n$
7. Montrer que pour $n \geq 3$ l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n \leq -\ln n$ et $\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$.
8. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

On considère la fonction numérique g définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x\ln x \ ; \ x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

9. Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0.

10. Vérifier que pour $n \geq 3$ on a : $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$.

11. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$.

2-2/ Exercice 1-2

Soit n un entier naturel .

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2}$

Soit $(\mathscr{C}_n)$ la courbe de f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$.
2. Étudier les branches infinies de la courbe $(\mathscr{C}_n)$.
3. Montrer que f_n est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$, puis calculer $f_n{}'(x)$.
4. Dresser le tableau de variations de f_n.
5. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet dans $]-\infty; 0[$ une seule solution x_n.
6. Montrer que $(\forall n \geq 2)\ -1 < x_n < -\frac{1}{n}$
7. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ f_{n+1}(x_n) = e^{x_n}$, et en déduire que $(x_n)_n$ est convergente.
8. Prouver que $(\forall n \geq 2)\ x_n \geq -\frac{2\ln n}{n}$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$.
9. Tracer la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

2-3/ Exercice 1-3

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$.

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x$

Partie 1

On pose $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
2. Étudier les variations de g, en déduire que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})\ g(x) > 0$.
3. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$.
4. Étudier la branche infinie de $(\mathscr{C}_n)$ au voisinage de $+\infty$.
5. Calculer la dérivée f_n, puis déduire que f_n est strictement croissants sur $]0; +\infty[$.
6. Étudier la position relative des courbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.
7. Tracer dans un même repère les ccourbes $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$.

Partie 2

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n et que $\alpha_n < 1$.
2. Vérifier que $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n$, en déduire que $(\alpha_n)_n$ est croissante.
3. Montrer que $(\forall x \in]0; 1])\ \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.
4. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$, puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n$.

2-4/ Exercice 1-4

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n\left(x\right) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$

Partie 1

On suppose $n = 1$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x \to 0} f_1\left(x\right)$, interpréter les résultats.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$, que peut-on déduire ?
3. Calculer $f_1\text{'}\left(x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, puis donner le tableau de variations.

Soit h la restriction de f_1 sur $I =]0, 2]$.

4. Montrer que h est bijective de I vers un intervalle J à déterminer.
5. Calculer $f_1\left(1\right)$ et montrer que h^{-1} est dérivable en $a = e - 1$, et déterminer $\left(h^{-1}\right)'\left(e - 1\right)$.
6. Tracer la courbe de f_1.

Partie 2

1. Étudier le sens de variation de f_n sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
2. Montrer que l'équation $f_n\left(x\right) = 0$ admet une seule solution α_n dans $]-\infty; 0[$.
3. Étudier le signe de $f_{n+1}\left(x\right) - f_n\left(x\right)$ sur $]-\infty; 0[$.
4. Déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$.
5. Montrer que $\left(\alpha_n\right)_n$ est croissante et convergente.
6. Déterminer la limite de la suite $\left(\alpha_n\right)_n$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{{\alpha_k}^2}{k^2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

7. Montrer que $\left(S_n\right)_n$ est croissante et convergente.

(On Remarque que $(\forall k \geq 2)$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$)