

Sommaire

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

2-2/ Exercice 1-2

2-3/ Exercice 1-3

2-4/ Exercice 1-4

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

$n$  est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

Soit  $(\mathcal{C}_n)$  la courbe représentative de  $f_n$  dans le plan muni d'un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
2. Étudier la branche infinie de  $(\mathcal{C}_n)$  au voisinage de  $-\infty$ .
3. Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$  est une asymptote oblique à la courbe au voisinage de  $(\mathcal{C}_n)$ , puis déterminer la position relative de  $(\mathcal{C}_n)$  et  $(D)$ .
4. Étudier les variations de  $f_n$  et dresser son tableau de variations.
5. Construire la courbe  $(\mathcal{C}_3)$ . (On prend  $f_3(-0,6) \approx 0$  et  $f_3(-1,5) \approx 0$  et  $\ln 3 \approx 1,1$ ).
6. Montrer que pour  $n \geq 3$  on a :  $\frac{e}{n} < \ln n$
7. Montrer que pour  $n \geq 3$  l'équation  $f_n(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $x_n$  et  $y_n$  telles que :  $x_n \leq -\ln n$  et  $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$ .
8. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$ .

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$$

9. Montrer que la fonction  $g$  est continue à droite au point 0.

10. Vérifier que pour  $n \geq 3$  on a :  $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ .

11. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ .

## 2-2/ Exercice 1-2

Soit  $n$  un entier naturel .

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2}$

Soit  $(\mathcal{C}_n)$  la courbe de  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x)$ .
2. Étudier les branches infinies de la courbe  $(\mathcal{C}_n)$ .
3. Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et  $]-\infty; 0[$ , puis calculer  $f_n'(x)$ .
4. Dresser le tableau de variations de  $f_n$ .
5. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 1$  admet dans  $]-\infty; 0[$  une seule solution  $x_n$ .
6. Montrer que  $(\forall n \geq 2) -1 < x_n < -\frac{1}{n}$
7. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) f_{n+1}(x_n) = e^{x_n}$ , et en déduire que  $(x_n)_n$  est convergente.
8. Prouver que  $(\forall n \geq 2) x_n \geq -\frac{2 \ln n}{n}$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ .
9. Tracer la courbe  $(\mathcal{C}_1)$ .

## 2-3/ Exercice 1-3

Soit  $n$  un entier de  $\mathbb{N}^*$ .

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$

### Partie 1

On pose  $g(x) = 1 + (x - 1)e^x$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
2. Étudier les variations de  $g$ , en déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) g(x) > 0$ .
3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$ .
4. Étudier la branche infinie de  $(\mathcal{C}_n)$  au voisinage de  $+\infty$ .
5. Calculer la dérivée  $f_n$ , puis déduire que  $f_n$  est strictement croissants sur  $]0; +\infty[$ .
6. Étudier la position relative des courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ .
7. Tracer dans un même repère les courbes  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ .

### Partie 2

1. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha_n$  et que  $\alpha_n < 1$ .
2. Vérifier que  $f_{n+1}(\alpha_n) = \ln \alpha_n$ , en déduire que  $(\alpha_n)_n$  est croissante.
3. Montrer que  $(\forall x \in ]0; 1]) \frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$ .
4. Déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$ , puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .

## 2-4/ Exercice 1-4

Soit  $n$  un entier naturel. On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{x^2} - 1$

### Partie 1

On suppose  $n = 1$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$ , interpréter les résultats.
2. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty$ , que peut-on déduire ?
3. Calculer  $f_1'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , puis donner le tableau de variations.

Soit  $h$  la restriction de  $f_1$  sur  $I = ]0, 2]$ .

4. Montrer que  $h$  est bijective de  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer.
5. Calculer  $f_1(1)$  et montrer que  $h^{-1}$  est dérivable en  $a = e - 1$ , et déterminer  $(h^{-1})'(e - 1)$ .
6. Tracer la courbe de  $f_1$ .

### Partie 2

1. Étudier le sens de variation de  $f_n$  sur  $]-\infty; 0[$  et  $]0; +\infty[$ .
  2. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha_n$  dans  $]-\infty; 0[$ .
  3. Étudier le signe de  $f_{n+1}(x) - f_n(x)$  sur  $]-\infty; 0[$ .
  4. Déduire la position relative des courbes  $(\mathcal{C}_n)$  et  $(\mathcal{C}_{n+1})$ .
  5. Montrer que  $(\alpha_n)_n$  est croissante et convergente.
  6. Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)_n$ .
- On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k^2}{k^2}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .
7. Montrer que  $(S_n)_n$  est croissante et convergente.
- (On Remarque que  $(\forall k \geq 2) \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ )