

Sommaire

I- Équations trigonométriques

1-1/ Équations de la forme $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

1-2/ Équations de la forme $\sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

1-3/ Équations de la forme $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

II- Inéquations trigonométriques dans un intervalle $K \subset \mathbb{R}$

2-1/ Inéquations de la forme $\cos x \geq a$; $\cos x > a$; $\cos x \leq a$; $\cos x < a$

2-2/ Inéquations de la forme $\sin x \geq a$; $\sin x > a$; $\sin x \leq a$; $\sin x < a$

2-3/ Inéquations de la forme $\tan x \geq a$; $\tan x > a$; $\tan x \leq a$; $\tan x < a$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

3-2/ Exercice 2

3-3/ Exercice 3

3-4/ Exercice 4

I- Équations trigonométriques

1-1/ Équations de la forme $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

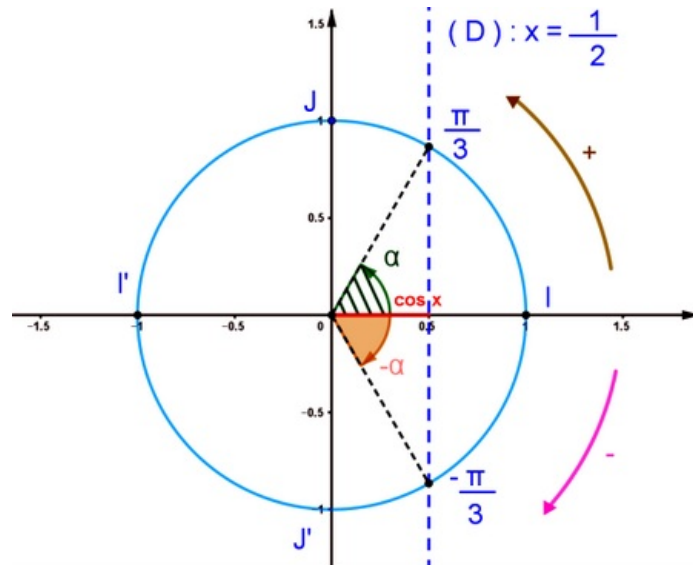
Activité

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ et $\vec{OI} = -\vec{i}$ et $\vec{OJ} = -\vec{j}$.

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\cos(\vec{i}, \vec{OM}) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .

3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\cos\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = 3$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation $x \in \mathbb{R} : \cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) pour solutions :

- 1er cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$

- 2ème cas : $a \in [-1, 1]$

on a $\cos x = a$, on cherche α de \mathbb{R} tel que $a = \cos \alpha$, d'où :

$$\begin{aligned} \cos x = a &\Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi, x = -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier :

$a = 0$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = 1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = -1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

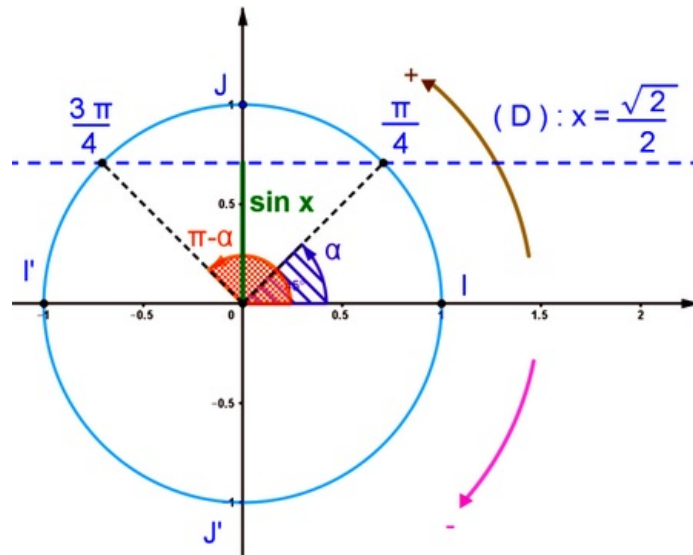
1-2/ Équations de la forme $\sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

Activité

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

(C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\overrightarrow{j}$.

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\sin \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right)$.
4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\sin \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM} \right) = -5$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation $x \in \mathbb{R} : \sin x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) pour solutions :

- 1er cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$

- 2ème cas : $a \in [-1, 1]$

on a $\sin x = a$, on cherche α de \mathbb{R} tel que $a = \sin \alpha$, d'où :

$$\begin{aligned} \sin x = a &\Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi, x = \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier :

$a = 0$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = 1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

$a = -1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

1-3/ Équations de la forme $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$)

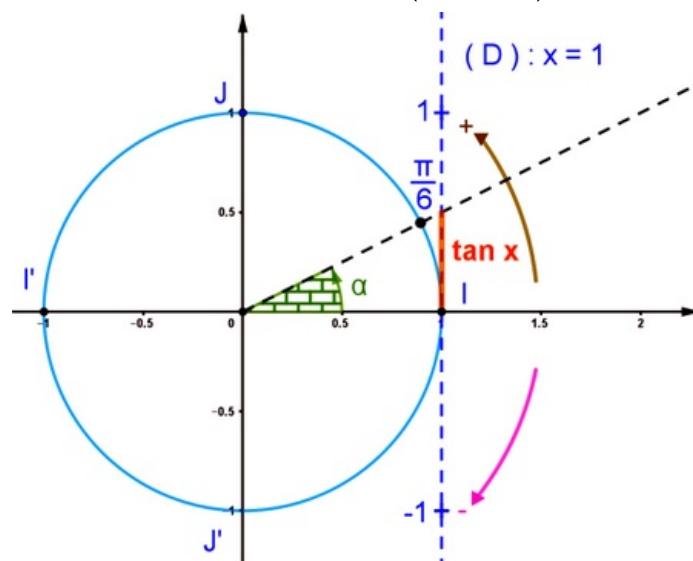
Activité

Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'équation : $\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I , coupe la demi-droite $[OM)$ au point T (condition $M \neq J$ et $M \neq J'$).

La droite (T) est muni du repère (I, \vec{i}) .

1. Déterminer la condition sur x pour que $\tan(x)$ soit définie .
2. Construire sur la droite (T) et le point T tel que $\tan(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OT}) = \frac{1}{2}$.
3. Construire sur le cercle les points M intersection de la droite (OT) et le cercle (C) .
4. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
5. Déterminer les mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$.
6. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\tan(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) = -5$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

Soit l'équation $x \in \mathbb{R} : \tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$).

L'ensemble de définition de l'équation (E) est $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

On a $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}$), et on cherche α de \mathbb{R} tel que $a = \tan \alpha$, d'où :

$$\begin{aligned} \tan x = a &\Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

II- Inéquations trigonométriques dans un intervalle $K \subset \mathbb{R}$

2-1/ Inéquations de la forme $\cos x \geq a$; $\cos x > a$; $\cos x \leq a$; $\cos x < a$

Exemple 1

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, 2\pi] ; \cos x \leq \frac{1}{2}$$

2-2/ Inéquations de la forme $\sin x \geq a$; $\sin x > a$; $\sin x \leq a$; $\sin x < a$

Exemple

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, 2\pi] ; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2-3/ Inéquations de la forme $\tan x \geq a$; $\tan x > a$; $\tan x \leq a$; $\tan x < a$

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, \pi] ; \tan x > \frac{1}{2}$$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1 \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$3 \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$4 \tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

2. Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

$$1 \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; I = [0, 2\pi]$$

$$2 \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) ; I = [-\pi, \pi]$$

$$3 \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} ; I = [0, 2\pi]$$

$$4 2 \cos(x) = -1 ; I = [0, \pi]$$

3. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

$$1 \sin(x) \geq \frac{1}{2} ; I = [0, 2\pi]$$

$$2 \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} ; I =] - \pi, \pi]$$

$$3 \tan(x) < -\sqrt{3} ; I =] - \pi, \pi]$$

$$4 \cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} ; I = [0, 2\pi]$$

3-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1 2 \cos^2(x) - 1 = 0$$

$$2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 2 = 0$$

$$3 3 \tan^2(x) - 1 = 0$$

$$4 2 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

3-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

| | |
|--|--|
| | |
|--|--|

$$1 \quad 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 ; I = [0, 2\pi]$$

$$2 \quad 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) = \sqrt{2} ; I = [-\pi, \pi]$$

$$3 \quad 2 \cos (2x) = \sqrt{3} ; I = [0, 2\pi]$$

$$4 \quad \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} ; I = [-\pi, \pi]$$

3-4/ Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $P(x) = 2 \cos^2(x) + \cos(x)$.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.
2. Étudier le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
3. Déduire les solutions de $P(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On pose $Q(x) = -2 \sin^2(x) + 3 \sin(x) - 1$.

4. Montrer que $Q(x) = (2 \sin(x) - 1)(1 - \sin(x))$.
5. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $Q(x) = 0$.
6. Étudier le signe de $Q(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
7. Déduire les solutions de $Q(x) > 0$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.