Mathématiques : Tronc Commun

Séance 10 (Trigonométrie 2 - Équations et inéquations trigonométriques)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Équations trigonométriques

1-1/ Équations de la forme $\cos x = a$ $(a \in \mathbb{R})$

Activité

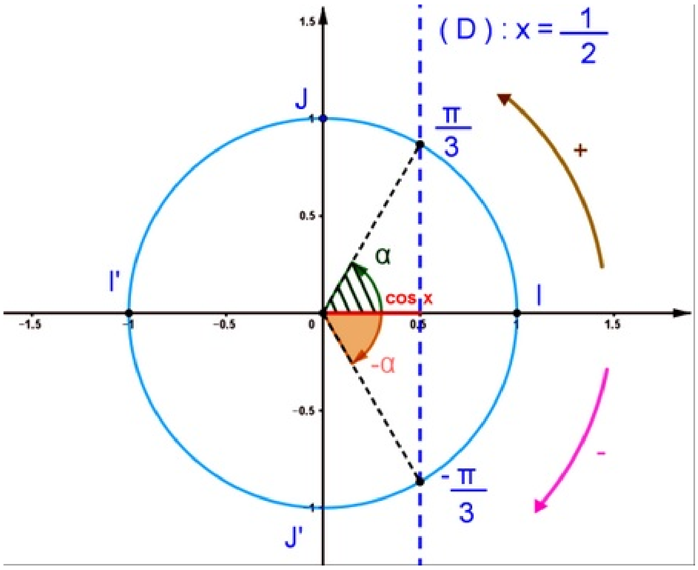
Le plan (P) est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

(C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\vec{j}$.

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\cos\left(\overrightarrow{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right) = \frac{1}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M.

3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.

4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\cos\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = 3$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation $x \in \mathbb{R}\ :\ \cos x = a\ (a \in \mathbb{R})$ pour solutions :

- 1er cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$

- 2ème cas : $a \in [-1, 1]$

on a $\cos x = a$, on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \cos\alpha$, d'où :

$$\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases};\ k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{x \in \mathbb{R}/x = \alpha + 2k\pi\ ,\ \mathrm{x} = -\alpha + 2\mathrm{k}\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier :

$a = 0$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

$a = 1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{2k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

$a = -1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{\pi + 2k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

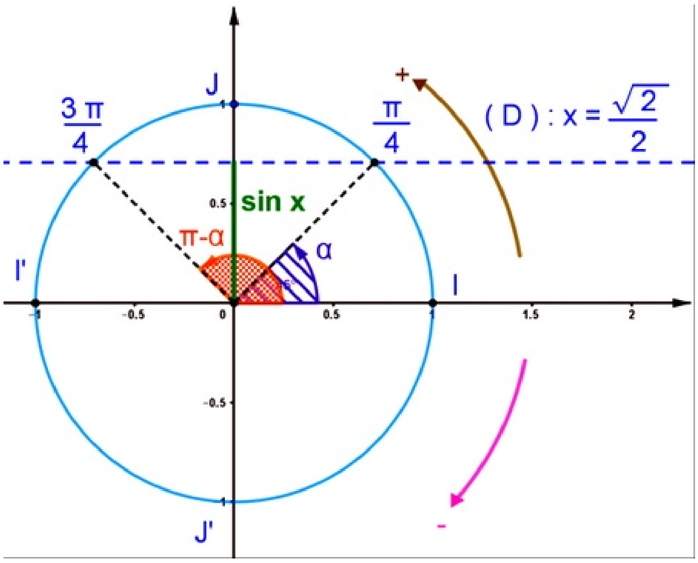
1-2/ Équations de la forme $\sin x = a\ (a \in \mathbb{R})$

Activité

Le plan (P) est rapporté a un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

(C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\overrightarrow{j}$.

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\sin\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M.
3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\sin\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = -5$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation $x \in \mathbb{R}\ :\ \sin x = a\ \ (a \in \mathbb{R})$ pour solutions :

- 1er cas : $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

L'équation n'a pas de solution d'où $S = \emptyset$

- 2ème cas : $a \in [-1, 1]$

on a $\sin x = a$, on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin\alpha$, d'où :

$$\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin\alpha$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases};\ k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \{x \in \mathbb{R}/x = \alpha + 2k\pi\ ,\ \mathrm{x} = \pi - \alpha + 2\mathrm{k}\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$$

Cas particulier :

$a = 0$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \{k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$

$a = 1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

$a = -1$: L'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

1-3/ Équations de la forme $\tan x = a\ \ (a \in \mathbb{R})$

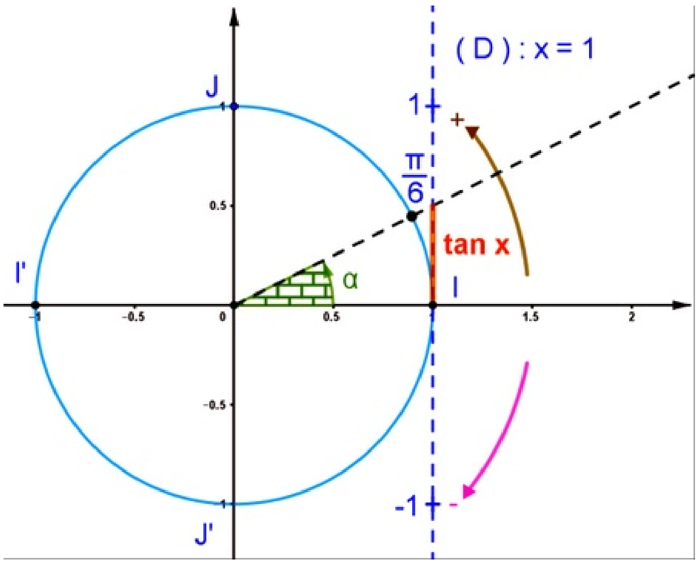
Activité

Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'équation : $\left\{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I, coupe la demi-droite $[OM)$ au point T (condition $M \neq J$ et $M \neq J$').

La droite (T) est muni du repère $\left(I, \vec{i}\right)$.

1. Déterminer la condition sur x pour que $\tan(x)$ soit définie .
2. Construire sur la droite (T) et le point T tel que $\tan\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OT}\right) = \frac{1}{2}$.
3. Construire sur le cercle les points M intersection de la droite (OT) et le cercle (C).
4. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M.
5. Déterminer les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right)$.
6. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\tan\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}\right) = -5$?



Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}$ et a un réel donné.

Soit l'équation $x \in \mathbb{R}\ :\ \tan x = a\ (a \in \mathbb{R})$.

L'ensemble de définition de l'équation (E) est $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\right\}$

On a $\tan x = a\ (a \in \mathbb{R})$, et on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \tan\alpha$, d'où :

$$\begin{aligned}\tan x = a &\Leftrightarrow \tan x = \tan\alpha \\ &\Leftrightarrow x = \alpha + k\pi;\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{x \in \mathbb{R}/x = \alpha + k\pi\ /\ \mathrm{k} \in \mathbb{Z}\}$$

II- Inéquations trigonométriques dans un intervalle $K \subset \mathbb{R}$

2-1/ Inéquations de la forme $\cos x \geq a\ ;\ \cos x > a\ ;\ \cos x \leq a\ ;\ \cos x < a$

Exemple 1

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, 2\pi]\ ;\ \cos x \leq \tfrac{1}{2}$$

2-2/ Inéquations de la forme $\sin x \geq a$; $\sin x > a$; $\sin x \leq a$; $\sin x < a$

Exemple

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, 2\pi] \; ; \; \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2-3/ Inéquations de la forme $\tan x \geq a$; $\tan x > a$; $\tan x \leq a$; $\tan x < a$

1. Résoudre l'inéquation suivante :

$$(E_1) : x \in [0, \pi] \; ; \; \tan x > \frac{1}{2}$$

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$1 \;\; \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $2 \;\; \sin(x) = \frac{1}{2}$	$3 \;\; \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $4 \;\; \tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

2. Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

$1 \;\; six(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; I = [0, 2\pi]$ $2 \;\; \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \; ; \; I = [-\pi, \pi]$	$3 \;\; \tan(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \; ; \; I = [0, 2\pi]$ $4 \;\; 2\cos(x) = -1 \; ; \; I = [0, \pi]$

3. Résoudre dans R les inéquations suivantes :

$1 \;\; \sin(x) \geq \frac{1}{2} \; ; \; I = [0, 2\pi]$ $2 \;\; \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; I = \left] -\pi, \pi \right]$	$3 \;\; \tan(x) < -\sqrt{3} \; ; \; I = \left] -\pi, \pi \right]$ $4 \;\; \cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \; ; \; I = [0, 2\pi]$

3-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1 \;\; 2\cos^2(x) - 1 = 0$$
$$2 \;\; \cos^2(x) - 3\cos(x) + 2 = 0$$
$$3 \;\; 3\tan^2(x) - 1 = 0$$
$$4 \;\; 2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

3-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1 $2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; $I=[0,2\pi]$ 2 $2\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{2}$; $I=[-\pi,\pi]$ 3 $2\cos(2x)=\sqrt{3}$; $I=[0,2\pi]$ 4 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $I=[-\pi,\pi]$	

3-4/ Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $P(x) = 2\cos^2(x) + \cos(x)$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$.
2. Étudier le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.
3. Déduire les solutions de $P(x) \leq 0$ dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

On pose $Q(x) = -2\ \sin^2(x) + 3\ \sin(x) - 1$.

4. Montrer que $Q(x) = (2\ \sin(x) - 1)(1 - \sin(x))$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$.
6. Étudier le signe de $Q(x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
7. Déduire les solutions de $Q(x) > 0$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.