AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Semestre 1 Devoir 1 Modèle 1

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

I- Exercice 1 (9 pts)

Partie 1

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = Arc\tan x + \frac{x}{1+x^2}$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$
2. Montrer que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.
3. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J qu'on doit déterminer.
4. Donner le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 1\right) Arc\tan x + x$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f'(x) = 2xg(x)$
3. Déduire le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Donner le tableau de variations de f.
5. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie 3

Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $a \in]0;1[$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < u_n < 1$
2. Étudier la monotonie de (u_n), puis déduire qu'elle est convergente.
3. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

II- Exercice 2 (6 pts)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = x^n - 1 + Arc\tan x$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (\exists! x_n \in]0;1[)\ :\ f_n(x_n) = 0$
2. Montrer que $x_1 > \frac{1}{2}$

Considérons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le terme x_n désigne l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$ dans l'intervalle $]0;1[$.

3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geq 1}$, puis déduire qu'elle est convergente.
4. Montrer que la suite $\left({x_n}^n\right)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante, puis déduire qu'elle est

convergente.

5. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 - \frac{\pi}{4} < {x_n}^n < 1$
6. En admettant que $\lim\limits_{n \to +\infty} {x_n}^n = 1 - \frac{\pi}{4}$, déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 1$.

III- Exercice 3 (5 pts)

Soit $(s_n)_{n \geq 1}$ une suite définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k u_k$, avec $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante convergente vers 0.

1. Montrer que les deux suites extraites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 1}$ tels que $v_n = s_{2n}$ et $w_n = s_{2n+1}$ sont adjacentes.
2. Déduire que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ est convergente.
3. Déduire que la suite $(s_n)_{n \geq 1}$ définie par $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$ est convergente.