

Sommaire

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

5-2/ Partie 2

---

V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on considère la fonction  $g_n$  définie par :  $g_n(x) = x + e^{-nx}$ .

Et soit  $\mathcal{C}_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $g_n$ .
2. Montrer que  $g_n$  admet un minimum absolu en un réel un qu'on exprimera en fonction de  $n$ .
3. Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_n(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$ .
4. Déterminer les branches infinies de  $\mathcal{C}_n$ .
5. Étudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ .
6. Tracer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . (On prend :  $\|\vec{i}\| = 2cm$  et  $\ln(2) \simeq 0.7$ )

On considère la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{M}$  par :  $f_n(x) = x + e^{nx}$

Et soit  $\Gamma_n$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Étudier les variations de la fonction  $f_n$ .
2. En déduire que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n$ .
3. Montrer que  $\alpha_1 \in ] -\ln 2; -\frac{1}{2} [$ .
4. Montrer que les quantités  $(x - \alpha_1)$  et  $(e^x + \alpha_1)$  ont le même signe.

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $] -\infty; -\frac{1}{2} [$  par :  $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}x$

5. Montrer que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur l'intervalle  $] -\infty; -\frac{1}{2} [$ .
6. En déduire que pour tout  $x \in ] -\infty; -\frac{1}{2} [$  :  $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$

On considère la suite  $(\beta_n)$  définie par  $\beta_0 = -\frac{1}{2}$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N} : \beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$

7. Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : |\beta_{n+1} - \alpha| \leq \alpha |\beta_n - \alpha|$$

8. Montrer que la suite  $(\beta_n)$  est convergente et déterminer sa limite.