AlloSchool

# Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

## Séance 5-3 : Fonctions exponentielles - Problème de synthèse

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

Sommaire



---

# V- Problème de synthèse

### 5-1/ Partie 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $g_n$ définie par : $g_n(x) = x + e^{-nx}$.

Et soit $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $g_n$.
2. Montrer que $g_n$ admet un minimum absolu en un réel un qu'on exprimera en fonction de $n$.
3. Calculer les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} g_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
4. Déterminer les branches infinies de $\mathscr{C}_n$.
5. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
6. Tracer dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. (On prend : $||\vec{i}|| = 2cm$ et $\ln(2) \simeq 0.7$)

On considère la fonction $f_n$ définie sur M par : $f_n(x) = x + e^{nx}$

Et soit $\mathit{\Gamma}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de la fonction $f_n$.
2. En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha_n$.
3. Montrer que $\alpha_1 \in \left] -\ln 2; -\frac{1}{2} \right[$.
4. Montrer que les quantités $(x - \alpha_1)$ et $(e^x + \alpha_1)$ ont le même signe.

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ par : $\varphi(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} x$

5. Montrer que la fonction $\varphi$ est décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.
6. En déduire que pour tout $x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2}\right]$ : $|e^x + \alpha_1| \leq \frac{1}{\sqrt{e}} |x - \alpha_1|$

On considère la suite $(\beta_n)$ définie par $\beta_0 = -\frac{1}{2}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\beta_{n+1} = -e^{\beta_n}$

7. Montrer qu'il existe un réel $\alpha$ tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ |\beta_{n+1} - \alpha_1| \leq \alpha \, |\beta_n - \alpha_1|$$

8. Montrer que la suite $(\beta_n)$ est convergente et déterminer sa limite.