Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 5-2-1 : Fonctions exponentielles - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Fonction exponentielle de base a

3-1/ Définition de la fonction exponentielle de base a

Définition 2

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction exponentielle de base a est la fonction réciproque de la fonction $\log_a$.

On la note exp_a.

Remarques

D'après la définition 2, on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right) \ (y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y))$$

Soit x un réel positif et y un réel strictement positif. On a alors :

$$y = exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y) = \frac{\ln y}{\ln a} \Leftrightarrow \ln y = x \ln a \Leftrightarrow y = e^{x \ln a}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$exp_a(x) = e^{x \ln a}$$

3-2/ Propriétés algébriques

Proposition 9

Soient x et y deux réels et r un nombre rationnel . Alors :

$$exp_a(x+y) = exp_a(x).\, exp_a(y)$$
$$exp_a(x-y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$$
$$exp_a(rx) = (exp_a(x))^r$$

3-3/ Une autre écriture de la fonction exp_a

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

On a : $exp_a\left(1\right) = e^{\ln a} = a$

Et puisque pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $exp_a\left(r\right) = \left(exp_a\left(1\right)\right)^r = a^r$

On prolonge cette écriture sur l'ensemble des nombres réels en écrivant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $exp_a\left(x\right) = a^x$

Proposition 10

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

Alors :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right)\ y = a^x \Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln a}$$
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ \log_a\left(a^x\right) = x$$
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right)\ a^{\log_a(x)} = x$$
$$\left(\forall x, y \in \mathbb{R}\right)\ a^{x+y} = a^x . a^y\ \ et\ \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

Remarque

On a supposé que $a > 0$ et $a \neq 1$, et après avoir prolongé l'écriture expa sous la forme d'une puissance de a, on a obtenu : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ a^x = e^{x \ln a}$

Le fait que $e^0 = 1$ nous conduit à poser « par convention » : $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a donc : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\left(\forall a \in \mathbb{R}_+^*\right)\ a^x = e^{x \ln a}$

Proposition 11

Soit a et b deux réels strictement positifs.

Alors, pour tout $\left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2$:

$$a^{x+y} = a^x \times a^y\ \ ;\ \ a^{-x} = \frac{1}{a^x}\ \ ;\ \ a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}\ \ ;\ \ \left(ab\right)^x = a^x . b^x\ \ ;\ \ \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

3-4/ Étude de la fonction exp_a

Proposition 12

La fonction exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(exp_a\right)'\left(x\right) = \left(a^x\right)' = \left(\ln a\right)a^x$$

Proposition 13

Si $a > 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\forall \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2\right)\ x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$

Si $0 < a < 1$ alors la fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:

$$\left(\forall \left(x, y\right) \in \mathbb{R}^2\right)\ x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

Proposition 14

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Si $0 < a < 1$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.