Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 5-1-1 : Fonctions exponentielles - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Fonction exponentielle népérienne

1-1/ Définition et propriétés élémentaires

Définition 1

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle), et on la note exp.

Remarques

La fonction $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$: $(\forall \beta \in \mathbb{R})\ \left(\exists! \alpha \in \mathbb{R}_+^*\right)\ \beta = \ln(\alpha)$

Par définition de la fonction exp : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right)\ (y = exp(x) \Leftrightarrow x = \ln(y))$

$exp(0) = 1$ et $exp(1) = e$ car $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Proposition 1

La fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $exp(x) > 0$ et $\ln(exp(x)) = x$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $exp(\ln x) = x$.

Corollaire

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y$ et $exp(x) < exp(y) \Leftrightarrow x < y$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(exp(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0)$ et $(exp(x) < 1 \Leftrightarrow x < 0)$ et $(exp(x) > 1 \Leftrightarrow x > 0)$.

1-2/ Propriétés algébriques

Proposition 2

Pour tous réels x et y, on a : $exp\,(x+y) = exp\,(x) \times exp\,(y)$

Proposition 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous réels $x_1, x_2, \ldots., x_n$, on a :

$$exp\,(x_1 + x_2 + \ldots. + x_n) = exp\,(x_1) \times exp\,(x_2) \times \ldots. \times exp\,(x_n)$$

c'est-à-dire :

$$exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \prod_{k=1}^{n} exp\,(x_k)$$

Proposition 4

Soit x et y deux nombres réels, et r un nombre rationnel.

Alors :

$$exp\,(-x) = \frac{1}{exp(x)} \quad ; \quad exp\,(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)} \quad ; \quad exp\,(rx) = (exp\,(x))^r$$

1-3/ Une autre écriture de la fonction exp

On a $exp(1) = e$.

On a déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $exp\,(rx) = (exp\,(x))^r$

En particulier pour $x = 1$: $exp\big(r\big) = \big(exp(1)\big)^r = e^r$

On prolongera cette écriture en notant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $exp(x) = e^x$

Remarquons enfin que cette nouvelle notation est compatible avec les notations des puissances connues.

Avec cette nouvelle notation, on résumera les résultats vus précédemment comme suit :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\left(\forall y \in \mathbb{R}_+^*\right) \ : \ y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ e^x > 0$$
$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \ln\,(e^x) = x$$
$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*\right) \ : \ e^{\ln x} = x$$
$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ : \ (e^x = e^y \Leftrightarrow x = y) \ et \ (e^x < e^y \Leftrightarrow x < y)$$
$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \ : \ (e^{x+y} = e^x \times e^y) \ et \ \left(e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}\right)$$
$$(\forall x, y \in \mathbb{R})\,(\forall r \in \mathbb{Q}) \ : \ e^{rx} = (e^x)^r$$

1-4/ Dérivée de la fonction exponentielle népérienne

Proposition 5

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a : $(\forall x \in \mathbb{R})\ exp'\,(x) = exp\,(x)$

Ce qui s'écrit aussi : $(\forall x \in \mathbb{R})\ \ (e^x)' = e^x$

Proposition 6

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\forall x \in I) \ \ \left(e^{u(x)}\right)' = u'\,(x).\,e^{u(x)}$$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

Les primitives de la fonction $x \mapsto u'(x).\, e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ où λ est une constante réelle.

1-5/ Limites fondamentales

Proposition 7

On a les limites fondamentales suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \ ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Si α est un réel non nul alors :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-1}{x} = \alpha \quad ; \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{e^x-e^\alpha}{x-\alpha} = e^\alpha$$

Proposition 8

Pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$$