

### Sommaire

#### V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1 : Existence et unicité d'une racine positive  $x$  de  $(E_n)$

5-2/ Partie 2 : Étude de la fonction auxiliaire  $f$

5-3/ Partie 3 : Étude de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$

---

#### V- Problème de synthèse

5-1/ Partie 1 : Existence et unicité d'une racine positive  $x$  de  $(E_n)$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère l'équation sur  $\mathbb{R}^*$  :  $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$

On étudiera  $(E_n)$  à l'aide de la fonction auxiliaire  $f : f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$

1. Résoudre l'équation pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .
2. Étudier les variations de la fonction numérique  $x \mapsto x^n + x - 1$  sur  $[0; +\infty[$  pour  $n \geq 1$ .
3. En déduire que l'équation  $(E_n)$  admet une et une seule racine positive qu'on notera  $x_n$ , et montrer que  $0 < x_n < 1$ .

5-2/ Partie 2 : Étude de la fonction auxiliaire  $f$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$  et les limites de  $f$  aux extrémités de celui-ci.
2. Calculer alors  $f'(x)$  et en déduire le tableau de variations de  $f$ .

5-3/ Partie 3 : Étude de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer que  $f(x_n) = n$  pour tout  $n \geq 1$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.
3. En déduire la convergence de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .
4. Préciser la valeur de la limite de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ .