Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 3 (Le barycentre dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Barycentre de deux points pondérés

1-1/ Définition

Soient (A, a) et (B, b) deux points pondérés du plan (P), tel que $A \neq B$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $a + b \neq 0$ alors il existe un point unique G de (P) tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

Le point G s'appelle barycentre du système pondéré $S = \{(A, a), (B, b)\}$ (ou encore barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b)).

Démonstration

1-2/ Propriétés

Invariance

Si G est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$, alors pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a aussi G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb)\}$.

Le barycentre de deux points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids (ou coefficients) par
le même réel non nul.

Propriété caractéristique

G est barycentre du système pondéré $S=\{(A,a),(B,b)\}$ si et seulement si $a+b\neq 0$ et $\forall M\in(P)\ :\ a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$.

Les points A et B et G sont alignés et $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

Cordonnées du point G barycentre de $S=\{(A,a),(B,b)\}$

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.

$A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G(x_G,y_G)$ sont des points de (P).

Si le point G est le barycentre de $S=\{(A,a),(B,b)\}$, alors on a $x_G=\frac{ax_A+bx_B}{a+b}$ et $y_G=\frac{ay_A+by_B}{a+b}$.

II- Barycentre de trois points pondérés

2-1/ Définition

Soient (A,a) et (B,b) et (C,c) trois points pondérés du plan (P), tel que $a,b,c\in\mathbb{R}$.

Si $a+b+c\neq 0$, alors il existe un point unique G de (P) qui vérifie :
$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$.

Le point G s'appelle barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ (ou encore barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) et (C,c)).

Si $a=b=c\neq 0$, alors le point G s'appelle isobarycentre des points A et B et C ou le centre de gravité du triangle ABC.

2-2/ Propriétés

Invariance

Si G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, alors pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a aussi G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc)\}$.

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids (ou coefficients) par le même réel non nul.

Propriété caractéristique

G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$ si et seulement si $a+b+c\neq 0$ et $\forall M\in(P)\ :\ a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\overrightarrow{MG}$.

Associativité du barycentre ou barycentre partiel

Le barycentre de trois points pondérés ne change pas si on remplace deux points du système par leur barycentre avec un poids qui est la somme de leur poids (ou avec un coefficient qui est la somme de
leur coefficients).

Ou encore G_2 est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ avec $a+b\neq 0$, et on a G est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, alors G est barycentre de $\{(G_2,a+b),(C,c)\}$.

Démonstration

Cordonnées du point G barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et $G(x_G,y_G)$ sont des points de (P).

Si le point G est le barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c)\}$, alors on a :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C}{a+b+c}$$
$$y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C}{a+b+c}.$$

III- Barycentre de quatre points pondérés

3-1/ Définition

Soient (A,a) et (B,b) et (C,c) et (D,d) trois points pondérés du plan (P), tel que $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Si $a+b+c+d\neq 0$, alors il existe un point unique G de (P) qui vérifie :
$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Le point G s'appelle barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ (ou encore barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b) et (C,c) et (D,d)).

Si $a=b=c=d\neq 0$, alors le point G s'appelle isobarycentre des points A et B et C et D, ou le centre de gravité du quadrilatère $ABCD$.

3-2/ Propriétés

Invariance

Si G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$, alors pour tout k de $\mathbb{R}^*$ on a aussi G est barycentre du système pondéré $\{(A,ka),(B,kb),(C,kc),(D,kd)\}$.

Le barycentre de quatre points pondérés ne change pas si on multiplie leurs poids (ou coefficients) par le même réel non nul.

Propriété caractéristique

G est barycentre du système pondéré $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$ si et seulement si
$a+b+c+d\neq 0$ et $\forall M\in(P)\ :\ a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}+d\overrightarrow{MD}=(a+b+c+d)\overrightarrow{MG}$.

Associativité du barycentre ou barycentre partiel

Le barycentre de quatrepoints pondérés ne change pas si on remplace deux points ou trois points du système par leur barycentre avec un poids qui est la somme de leur poids (ou avec un coefficient qui est la somme de
leur coefficients).

Ou encore G_1 est barycentre de $\{(A,a),(B,b)\}$ avec $a+b\neq 0$, et G_2 est barycentre de $\{(C,c),(D,d)\}$ avec $c+d\neq 0$.

On a G est barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$, alors G est barycentre de $\{(G_1,a+b),(G_2,c+d)\}$.

Cordonnées du point G barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

$A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $C(x_C,y_C)$ et $D(x_D,y_D)$ et $G(x_G,y_G)$ sont des points de (P).

Si le point G est le barycentre de $\{(A,a),(B,b),(C,c),(D,d)\}$, alors on a :

$$x_G=\frac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d}$$
$$y_G=\frac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}$$

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

Soit A et B deux points et $m\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs de m pour que les deux points pondérés $(A;2m)$ et $(B;m-3)$ admettent un barycentre G.
2. Écrire une relation entre $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GA}$ dans ce cas.
3. Construire le point G dans le cas où $m=-1$.

4-2/ Exercice 2

Soient A et B deux points distincts, I est le milieu du segment $[AB]$ et G le barycentre de $(A;1)$ et $(B;-3)$.

1)Déterminer l'ensemble :

$$(E_1)\ :\ \left\{M\in\mathscr{P}/\ ||\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}||=4\right\}$$

2)Déterminer l'ensemble :

$$(E_2)\ :\ \left\{M\in\mathscr{P}/\ ||\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}||=||\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}||\right\}$$

4-3/ Exercice 3

Soit G le barycentre de $(A;3)$ et $(B;-2)$, E et F deux points tels que : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ et $E\notin(AB)$.

1. Montrer que G est le barycentre de $(E;-1)$ et $(F;2)$.
2. En déduire que les deux droites (EF) et (AB) sont sécantes en un points qu'on

déterminera.

4-4/ Exercice 4

Soit ABC un triangle et soit G le barycentre des points $(A;2)$, $(B;-4)$ et $(C;-6)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.
2. Construire le point G.
3. Construire le point J définie par cette relation : $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.
4. Montrer que J est le barycentre de $(B;-4)$ et $(C;-6)$.
5. Montrer que les points A, J et G sont alignés.

Soit K un point tel que B est le milieu du segment $[AK]$.

6. Montrer que K est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-4)$.
7. Montrer que G est le barycentre des points $(k;-2)$ et $(C;-6)$.
8. Déduire que les deux droits (AJ) et (KC) sont sécantes en un point qu'on déterminera.
9. Déterminer l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{P} / \, ||2\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} - 6\overrightarrow{MC}|| = 2AC\right\}$.

4-5/ Exercice 5

Soient H le barycentre des points $(A;-1)$ et $(B;3)$ et K le barycentre des points $(C;1)$ et $(D;1)$.

1. Construire les points H et K.
2. Déterminer l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{P} / \, ||-\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|| = ||\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}||\right\}$.
3. Construire le point G le barycentre des points $(A;-1)$, $(B;3)$, $(C;1)$ et $(D;1)$.

4-6/ Exercice 6

Soient A, B et C des points du plan et G_n le barycentre des points $(A;2)$, $(B;n)$ et $(C;n)$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que G_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Construire G_1 et G_2.

Soit H un point tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

3. Déterminer la valeur de n pour que les points H et G_n et C soient alignés.
4. Déterminer l'ensemble des points $\left\{M \in \mathscr{P} / \, ||2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}|| = ||\overrightarrow{AB}||\right\}$.