Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 2 (Généralités sur les fonctions)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Fonction numérique

Toute relation f qui associe chaque élément x au plus de $\mathbb{R}$ par un élément y de $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique de la variable réelle x.

On note : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x)$

Tous les éléments x de qui ont images par f constituent un ensemble qu'on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition), on le note $\mathscr{D}_f$ ou D_f.

1-2/ Fonction paire – fonction impaire

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f.

f est paire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ , \ -x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ , \ f(-x) = f(x) \end{cases}$

f est impaire sur $D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f \ , \ -x \in D_f \\ \forall x \in D_f \ , \ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I.

f est une fonction croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$

f est une fonction strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$

f est une fonction décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$

f est une fonction strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$

f est une fonction constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$

1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction f

Définition

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I.

Soient $x, x' \in I$ tel que $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ s'appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre x et x', on le note T_f.

Propriétés

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I.

Si $T_f \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.

Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Si $T_f \geq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I.

Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur I.

II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

2-1 Définitions

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur $I \subset D_f$.

Soient $M, m \in \mathbb{R}$

La fonction f est majorée par M sur I si et seulement si $\forall x \in I\ ;\ f(x) \leq M$.

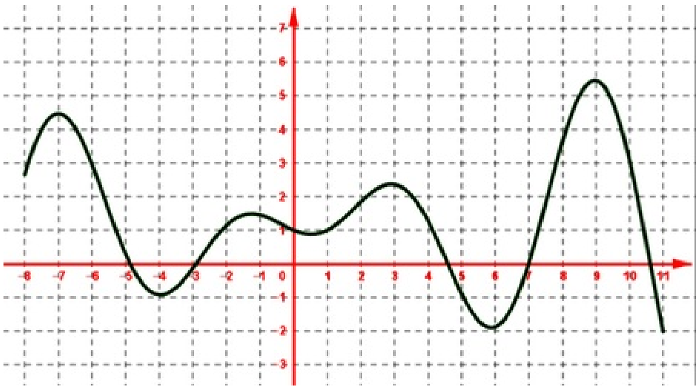
La fonction f est minorée par m sur I si et seulement si $\forall x \in I\ ;\ f(x) \geq m$.

La fonction f est bornée sur I si et seulement si f est majorée et minorée sur I.

Remarque

La fonction f est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+ ,\ \forall x \in I\ :\ |f(x)| \leq A)$

Exemple



2-2/ Extremums d'une fonction

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0 \in D_f$.

$f(x_0)$ est valeur maximale absolue de f si et seulement si $\forall x \in D_f\ ,\ f(x) \leq f(x_0)$.

$f(x_0)$ est valeur minimale absolue de f si et seulement si $\forall x \in D_f\ ,\ f(x) \geq f(x_0)$.

2-3/ Fonction périodique

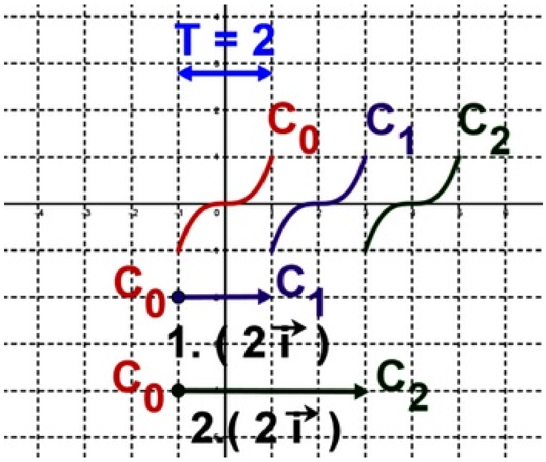
f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f.

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$

La fonction f est périodique sur D_f et son période est T si et seulement si :

① $x \in D_f \Rightarrow \left(x + T \in D_f \ et\ x - T \in D_f\right)$

② $\forall x \in D_f\ :\ f(x+T) = f(x)$



III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

3-1/ Égalité de deux fonctions

Soit f et g deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement Df et Dg.

On dit que f et g sont égales, et on note f = g, si $\begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

3-2/ Comparaison de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

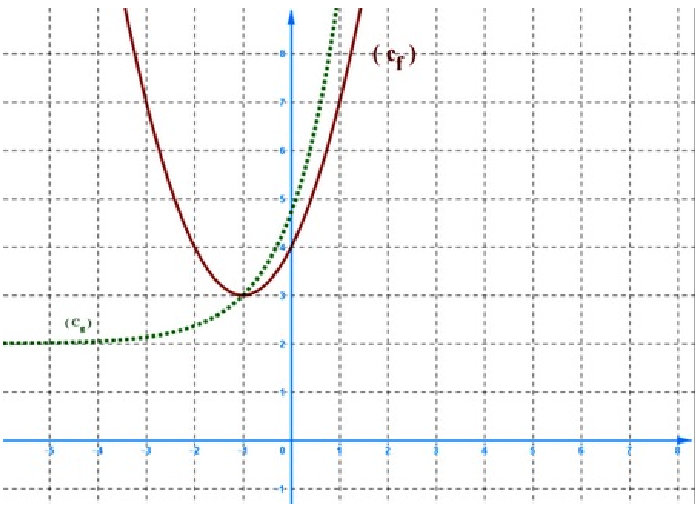
- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \ : \ f(x) \leq g(x))$. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est située au dessous de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ sur I.

- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \ : \ f(x) > g(x))$. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est située strictement au dessus de la courbe $(\mathscr{C}_g)$ sur I.

- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I \ : \ f(x) = g(x))$. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ et la courbe $(\mathscr{C}_g)$ sont confondues sur I.

- f est une fonction positive sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f \ : \ f(x) \geq 0$. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f est située au dessus de l'axe des abscisses.

- f est une fonction strictement négative sur D_f si et seulement si . La courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f est située strictement au dessous de l'axe des abscisses.



IV- Composée de deux fonctions

4-1/ Vocabulaire

La fonction $h : x \to h(x) = g(f(x))$, on la note par $h = g \circ f$, d'où :
$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

La fonction $g \circ f$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.

On peut faire le diagramme suivant pour $g \circ f$:

$$\begin{array}{l} h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ \qquad\qquad x \mapsto \quad f(x) \in D_g \quad \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x) \end{array}$$

4-2/ Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

On pose : $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \; et \; f(x) \in D_g\right\}$.

La fonction h définie sur $D_{g\circ f}$ par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.

On note $h = g \circ f$.

4-3/ Monotonie de fonctions composées

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

- Si f et g ont même monotonie (strictement monotone) respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est croissante sur D_f ($g \circ f$ est strictement croissante sur D_f).

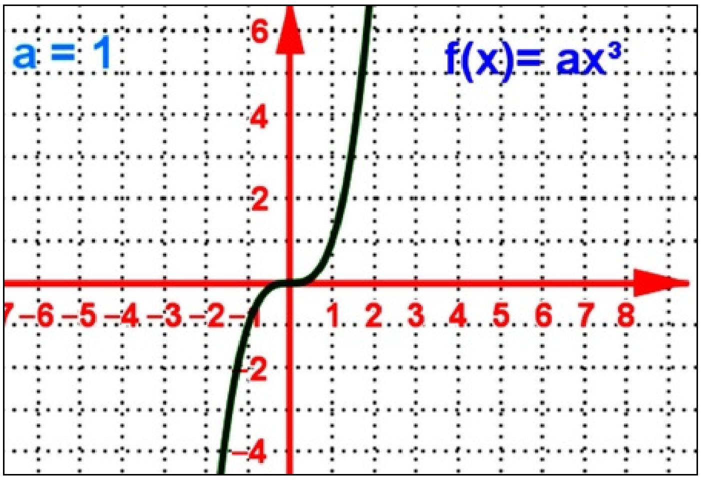
- Si f et g ont monotonie (strictement monotone) opposées respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est décroissante sur D_f ($g \circ f$ est strictement décroissante sur D_f).

V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions

5-1/ Fonction $f(x) = ax^3$ $(a \neq 0)$

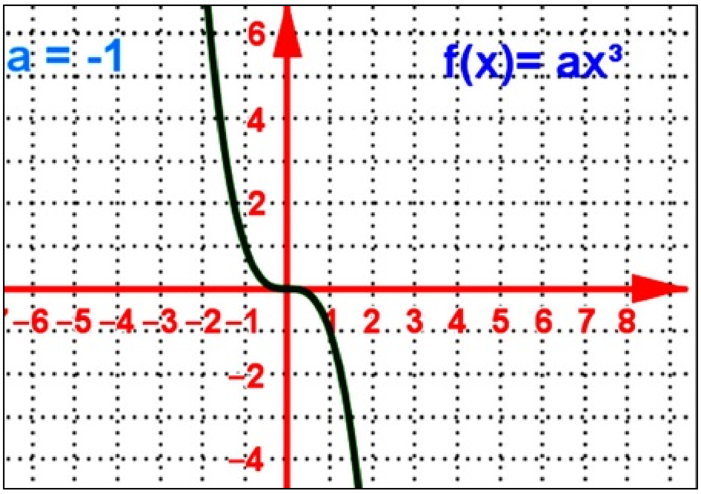
1er cas $(a > 0)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$	0	$\nearrow$



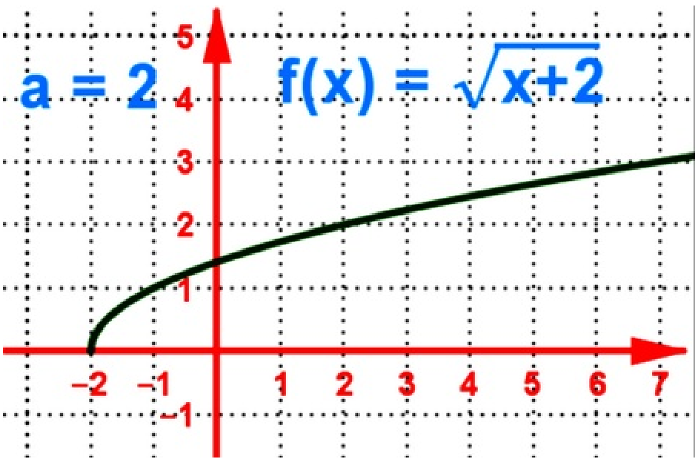
2nd cas $(a < 0)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$



5-2/ Fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Montrer que la fonction f est majorée par M dans chacune des cas suivantes :

a) $f\left(x\right) = -x^2 + 2x$ et $M = 1$.

b) $f\left(x\right) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$ et $M = 3$.

c) $f\left(x\right) = \frac{4}{x^2+2}$ et $M = 2$.

2. Montrer que la fonction f est minorée par m dans chacune des cas suivantes :

a) $f\left(x\right) = x^2 + 4x$ et $m = -4$.

b) $f\left(x\right) = \sqrt{x^2+1}$ et $m = 1$.

3. Montrer que la fonction f est bornée par M et m dans chacune des cas suivantes :

a) $f\left(x\right) = \frac{1}{x^2+1}$ et $M = 0$ et $m = -1$.

b) $f\left(x\right) = \sin\left(x\right) + \sqrt{3}$ et $M = 3$ et $m = 0$.

6-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f\left(x\right) = x^2 + 2x + 3$

1. Montrer que $f\left(-1\right)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Soit g la fonction définie par : $g\left(x\right) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

2. Montrer que $g(-1)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$.

6-3/ Exercice 3

Soient f et g deux fonctions.

Déterminer $D_{g\circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g\circ f$, et $D_{f\circ g}$ l'ensemble de définition de la fonction $f\circ g$, et déterminer les expressions $g\circ f\left(x\right)$ et $f\circ g\left(x\right)$, dans chacune des cas suivantes :

$$1\ \ f\left(x\right) = x^2\ \ ;\ \ g\left(x\right) = x^3$$
$$2\ \ f\left(x\right) = x^2 - 5\ \ ;\ \ g\left(x\right) = \frac{1}{x}$$
$$3\ \ f\left(x\right) = \sqrt{x}\ \ ;\ \ g\left(x\right) = x^2$$
$$4\ \ f\left(x\right) = \sqrt{x-8}\ \ ;\ \ g\left(x\right) = x^3$$

6-4/ Exercice 4

Déterminer les variations de la fonction f dans chacune des cas suivantes :

1 $f\left(x\right) = x^2 + \sqrt{2}$ 2 $f\left(x\right) = x^3 - 5$ 3 $f\left(x\right) = \frac{8}{x}$ 4 $f\left(x\right) = -3\sqrt{x-3} + 5$	5 $f\left(x\right) = x^2 - 6$ 6 $f\left(x\right) = \frac{-\sqrt{3}+1}{x}$ 7 $f\left(x\right) = \sqrt{x-5} + 6$ 8 $f\left(x\right) = -6x^3 + 9$

6-5/ Exercice 5

En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonction, étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalle I et J dans chacune des cas suivantes :

$$1 \;\; f(x) = \sqrt{x^2+1} \;\; ; \;\; I = \mathbb{R}^+ \;\; ; \;\; J = \mathbb{R}^-$$
$$2 \;\; f(x) = \frac{1}{x^2+3} \;\; ; \;\; I = \mathbb{R}^+ \;\; ; \;\; J = \mathbb{R}^-$$
$$3 \;\; f(x) = \sin^2(x) \;\; ; \;\; I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \;\; ; \;\; J = \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

6-6/ Exercice 6

1. Représenter graphiquement la fonction f dans chacune des cas suivantes :

1 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 2 $f(x) = \sqrt{x+3}$ 3 $f(x) = \frac{-4}{x^3}$	4 $f(x) = \frac{2}{x^3}$ 5 $f(x) = \sqrt{x-1}+2$ 6 $f(x) = \frac{1}{x^3}+1$

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = \frac{4}{x^3}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.

2. Représenter graphiquement f et g.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) < g(x)$.
5. Vérifier algébriquement les solutions précédentes.