

Sommaire**I- Rappels**

1-1/ Fonction numérique

1-2/ Fonction paire – fonction impaire

1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction f **II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée**

2-1/ Définitions

2-2/ Extremums d'une fonction

2-3/ Fonction périodique

III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

3-1/ Égalité de deux fonctions

3-2/ Comparaison de deux fonctions

IV- Composée de deux fonctions

4-1/ Vocabulaire

4-2/ Définition

4-3/ Monotonie de fonctions composées

V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions5-1/ Fonction $f(x) = ax^3$ ($a \neq 0$)5-2/ Fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$ **VI- Exercices**

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

I- Rappels

1-1/ Fonction numérique

Toute relation f qui associe chaque élément x au plus de \mathbb{R} par un élément y de \mathbb{R} est appelée fonction numérique de la variable réelle x .

On note : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Tous les éléments x de qui ont images par f constituent un ensemble qu'on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition), on le note \mathcal{D}_f ou D_f .

1-2/ Fonction paire – fonction impaire

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

$$f \text{ est paire sur } D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = f(x) \end{cases}$$

$$f \text{ est impaire sur } D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

définition :

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I .

f est une fonction croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$

f est une fonction strictement croissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$

f est une fonction décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$

f est une fonction strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$

f est une fonction constante sur $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$

1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction f

Définition

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur un intervalle I .

Soient $x, x' \in I$ tel que $x \neq x'$, le nombre $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ s'appelle le taux d'accroissement de la fonction f entre x et x' , on le note T_f .

Propriétés

T_f est le taux d'accroissement de la fonction f sur l'intervalle I .

Si $T_f \leq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I .

Si $T_f < 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Si $T_f \geq 0$ alors la fonction f est décroissante sur I .

Si $T_f > 0$ alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

Si $T_f = 0$ alors la fonction f est constante sur I .

II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

2-1 Définitions

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur $I \subset D_f$.

Soient $M, m \in \mathbb{R}$

La fonction f est majorée par M sur I si et seulement si $\forall x \in I ; f(x) \leq M$.

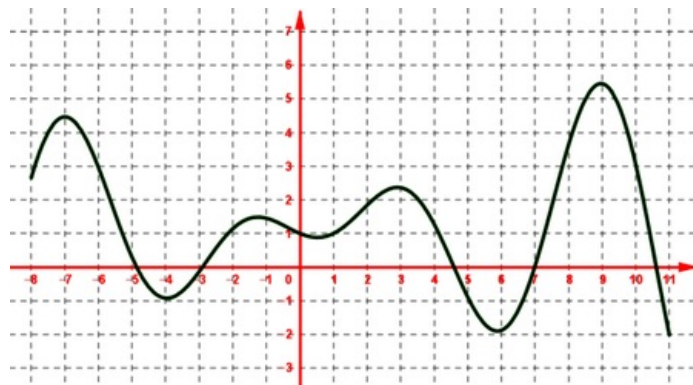
La fonction f est minorée par m sur I si et seulement si $\forall x \in I ; f(x) \geq m$.

La fonction f est bornée sur I si et seulement si f est majorée et minorée sur I .

Remarque

La fonction f est bornée sur $I \Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in I : |f(x)| \leq A)$

Exemple



2-2/ Extremums d'une fonction

f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f tel que $x_0 \in D_f$.

$f(x_0)$ est valeur maximale absolue de f si et seulement si $\forall x \in D_f , f(x) \leq f(x_0)$.

$f(x_0)$ est valeur minimale absolue de f si et seulement si $\forall x \in D_f , f(x) \geq f(x_0)$.

2-3/ Fonction périodique

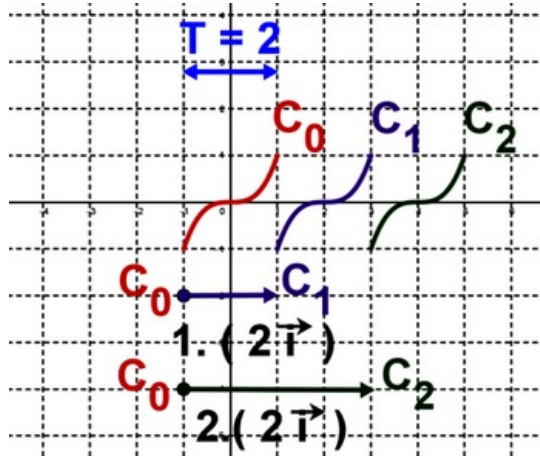
f est une fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f .

Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$

La fonction f est périodique sur D_f et son période est T si et seulement si :

① $x \in D_f \Rightarrow (x + T \in D_f \text{ et } x - T \in D_f)$

② $\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)$



III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

3-1/ Égalité de deux fonctions

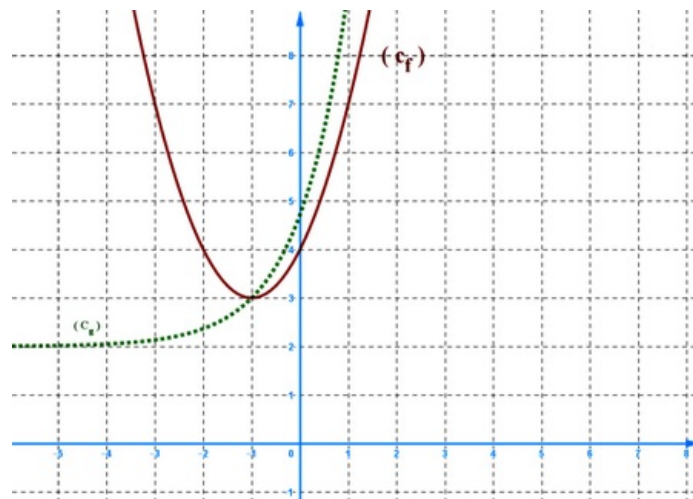
Soit f et g deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement D_f et D_g .

On dit que f et g sont égales, et on note $f = g$, si
$$\begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

3-2/ Comparaison de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur I .

- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$. La courbe (\mathcal{C}_f) est située au dessous de la courbe (\mathcal{C}_g) sur I .
- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) > g(x))$. La courbe (\mathcal{C}_f) est située strictement au dessus de la courbe (\mathcal{C}_g) sur I .
- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$. La courbe (\mathcal{C}_f) et la courbe (\mathcal{C}_g) sont confondues sur I .
- f est une fonction positive sur D_f si et seulement si $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$. La courbe (\mathcal{C}_f) de f est située au dessus de l'axe des abscisses.
- f est une fonction strictement négative sur D_f si et seulement si . La courbe (\mathcal{C}_f) de f est située strictement au dessous de l'axe des abscisses.



IV- Composée de deux fonctions

4-1/ Vocabulaire

La fonction $h : x \rightarrow h(x) = g(f(x))$, on la note par $h = g \circ f$, d'où :
 $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$.

La fonction $g \circ f$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.

On peut faire le diagramme suivant pour $g \circ f$:

$$\begin{array}{c} \mathbf{h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}} \\ \mathbf{x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)} \end{array}$$

4-2/ Définition

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

On pose : $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$.

La fonction h définie sur $D_{g \circ f}$ par $h(x) = g(f(x))$ est appelée la composée des fonction f et g dans cet ordre.

On note $h = g \circ f$.

4-3/ Monotonie de fonctions composées

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.

- Si f et g ont même monotonie (strictement monotone) respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est croissante sur D_f ($g \circ f$ est strictement croissante sur D_f).

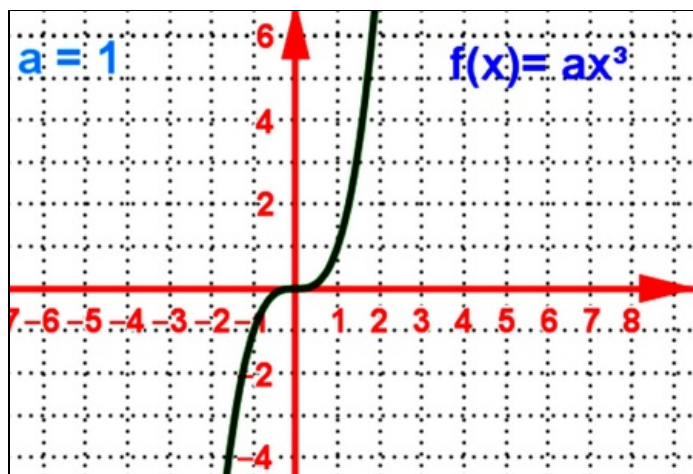
- Si f et g ont monotonie (strictement monotone) opposées respectivement sur D_f et $f(D_f) \subset D_g$, alors $g \circ f$ est décroissante sur D_f ($g \circ f$ est strictement décroissante sur D_f).

V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions

5-1/ Fonction $f(x) = ax^3$ ($a \neq 0$)

1er cas ($a > 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)		0	



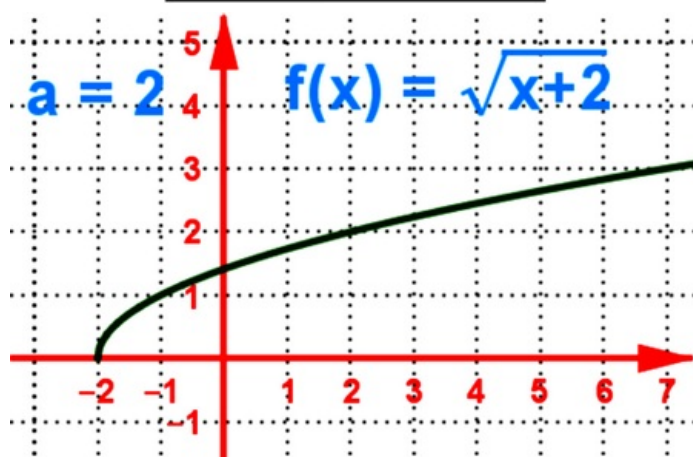
2nd cas ($a < 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↙	0	↘



5-2/ Fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0	↗



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

1. Montrer que la fonction f est majorée par M dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = -x^2 + 2x$ et $M = 1$.

b) $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$ et $M = 3$.

c) $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$ et $M = 2$.

2. Montrer que la fonction f est minorée par m dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = x^2 + 4x$ et $m = -4$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $m = 1$.

3. Montrer que la fonction f est bornée par M et m dans chacune des cas suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et $M = 0$ et $m = -1$.

b) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}$ et $M = 3$ et $m = 0$.

6-2/ Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Montrer que $f(-1)$ est le minimum de f sur \mathbb{R} .

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

2. Montrer que $g(-1)$ est le maximum de g sur \mathbb{R} .

6-3/ Exercice 3

Soient f et g deux fonctions.

Déterminer $D_{g \circ f}$ l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$, et $D_{f \circ g}$ l'ensemble de définition de la fonction $f \circ g$, et déterminer les expressions $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$, dans chacune des cas suivantes :

1 $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3$

2 $f(x) = x^2 - 5$; $g(x) = \frac{1}{x}$

3 $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2$

4 $f(x) = \sqrt{x-8}$; $g(x) = x^3$

6-4/ Exercice 4

Déterminer les variations de la fonction f dans chacune des cas suivantes :

1 $f(x) = x^2 + \sqrt{2}$

2 $f(x) = x^3 - 5$

3 $f(x) = \frac{8}{x}$

4 $f(x) = -3\sqrt{x-3} + 5$

5 $f(x) = x^2 - 6$

6 $f(x) = \frac{-\sqrt{3}+1}{x}$

7 $f(x) = \sqrt{x-5} + 6$

8 $f(x) = -6x^3 + 9$

6-5/ Exercice 5

En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonction, étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalle I et J dans chacune des cas suivantes :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{x^2+1} ; I = \mathbb{R}^+ ; J = \mathbb{R}^-$$

$$2 \quad f(x) = \frac{1}{x^2+3} ; I = \mathbb{R}^+ ; J = \mathbb{R}^-$$

$$3 \quad f(x) = \sin^2(x) ; I = [0; \frac{\pi}{2}] ; J = [\frac{\pi}{2}; \pi]$$

6-6/ Exercice 6

1. Représenter graphiquement la fonction f dans chacune des cas suivantes :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{-4}{x^3}$$

$$4 \quad f(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

$$6 \quad f(x) = \frac{1}{x^3} + 1$$

Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = \frac{4}{x^3}$ et $g(x) = \sqrt{x+2}$.

2. Représenter graphiquement f et g .
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) < g(x)$.
5. Vérifier algébriquement les solutions précédentes.