

Mathématiques : 1Bac S.Exp - STE - STM - Eco

Séance 1 (Notions de logique)

Professeur : Mr **ETTOUHAMY Abdelhak**

Sommaire

I- Définitions

1-1/ Proposition

1-2/ Fonction propositionnelle

1-3/ Quantificateurs

II- Opérations sur les propositions

2-1/ La négation d'une proposition

2-2/ La conjonction de deux propositions – La disjonction de deux propositions

2-3/ L'implication de deux propositions

2-4/ L'équivalence de deux propositions

2-5/ Les lois logiques

III- Types de raisonnements

3-1/ Raisonnement par contre exemple

3-2/ Raisonnement par des équivalences successives

3-3/ Raisonnement déductif

3-4/ Raisonnement par la contraposée

3-5/ Raisonnement par la disjonction des cas

3-6/ Raisonnement par l'absurde

3-7/ Raisonnement par la récurrence

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

5-7/ Exercice 7

I- Définitions

1-1/ Proposition

tout énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps) est une proposition.

On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ..etc...

Exemple

1-2/ Fonction propositionnelle

On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé mathématique contenant une variable x ou plusieurs variables (x, y, z, \dots), et qui appartiennent à des ensembles déterminés.

On note $P(x)$ ou $P(x,y,z,\dots)$.

1-3/ Quantificateurs

Quantificateur universel

L'expression suivante « pour tout x de E la proposition $Q(x)$ est vraie », on la note : « $\forall x \in E, Q(x)$ » .

Le symbole \forall s'appelle quantificateur universel et il se lit :

- pour tout
- quel que soit

Exemple :

- « $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$ »

Quantificateur existentiel

L'expression suivante « il existe un x de E tel que la proposition $Q(x)$ est vraie », on la note : « $\exists x \in E, Q(x)$ » .

Le symbole \exists s'appelle quantificateur existentiel et il se lit :

- il existe

Exemple :

- « $\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 \geq 1$ »

Symbol $\exists!$

L'expression suivante « il existe un unique x de E tel que la proposition $Q(x)$ est vraie », on la note : « $\exists! x \in E, Q(x)$ » .

Exemple :

- « $\exists!x \in \mathbb{R}, x + 2 = 1$ »

Remarques

- L'ordre des quantificateurs de même type (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- L'ordre des quantificateurs de types différents (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.
- La négation du quantificateur \forall est le quantificateur \exists .
- La négation du quantificateur \exists est le quantificateur \forall .
- Les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \Leftrightarrow \forall x, y \in E \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E \times E$$

- Les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\exists x \in E, \exists y \in E \Leftrightarrow \exists x, y \in E \Leftrightarrow \exists (x, y) \in E \times E$$

II- Opérations sur les propositions

2-1/ La négation d'une proposition

La négation d'une proposition P est la proposition qu'on note \overline{P} ou non P tel que les valeurs de vérité de P et \overline{P} sont opposées.

p	$\overline{p} = \neg p$
1	0
0	1

2-2/ La conjonction de deux propositions – La disjonction de deux propositions

La conjonction de deux propositions

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \wedge Q$ ou bien P et Q .

Elle est vraie seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux vraies.

p	q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La disjonction de deux propositions

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition notée $P \vee Q$ ou bien P ou Q .

Elle est fausse seulement dans le cas où P et Q sont toutes les deux fausses.

p	q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Propriétés

La conjonction et la disjonction sont commutatives :

$$P \wedge Q = Q \wedge P ; P \vee Q = Q \vee P$$

La conjonction et la disjonction sont associatives :

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) ; (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

La négation de la conjonction : $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$

La négation de la disjonction : $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$

La conjonction est distributive sur la disjonction :

$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

La disjonction est distributive sur la conjonction :

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

2-3/ L'implication de deux propositions

Définition

L'implication de deux propositions P puis Q est la proposition $\overline{P} \vee Q$; qu'on note par $P \Rightarrow Q$.

On lit P implique Q .

La proposition P s'appelle les données (ou hypothèses) de l'implication.

La proposition Q s'appelle la conclusion de l'implication.

p	q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Propriétés

L'implication est transitive : $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

La négation de l'implication : $\overline{(P \Rightarrow Q)} = P \wedge \overline{Q}$

La contraposée : $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

2-4/ L'équivalence de deux propositions

Définition

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$; qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$.

On lit P est équivalente à Q ou bien P si et seulement si Q .

p	q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Propriétés

L'équivalence est transitive : $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

$$(P \Leftrightarrow Q) = (Q \Leftrightarrow P)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) = (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$$

$$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} = \overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)} = (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$$

2-5/ Les lois logiques

Définition

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constitue.

III- Types de raisonnements

3-1/ Raisonnement par contre exemple

Pour prouver que la propriété suivante est fausse ($\forall x \in E, P(x)$) , il suffit de prouver que $(\exists x \in E, \overline{P(x)})$ est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$, c'est ce qu'on appelle un contre exemple).

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre exemple.

Exemple

3-2/ Raisonnement par des équivalences successives

Pour démontrer que l'équivalence suivant $P \Leftrightarrow Q$ est vrai, on démontre que : $P \Leftrightarrow Q_1$ et $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$ et $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$ et ... et $Q_n \Leftrightarrow Q$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives.

3-3/ Raisonnement déductif

Si on a l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par déduction.

3-4/ Raisonnement par la contraposée

Pour démontrer l'implication suivante $P \Rightarrow Q$, il suffit de démontrer l'implication suivante $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la contraposée.

3-5/ Raisonnement par la disjonction des cas

Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration, le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par disjonction des cas.

3-6/ Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition Q (conclusion ou résultat), et on a parmi les données la proposition P .

On suppose que \overline{Q} et au cours de la démonstration on trouve une contradiction

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par l'absurde.

3-7/ Raisonnement par la récurrence

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une relation portant sur les entiers naturels n tel que $n \geq n_0$.

Pour démontrer que la relation $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, on utilise les étapes suivantes :

- On vérifie que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$ (c.à.d. $P(n_0)$ est vraie).
- On suppose que $P(n)$ est vraie pour n avec $n \geq n_0$, la supposition s'appelle hypothèse de récurrence
- On démontre que la relation $P(n)$ est vraie pour $n + 1$ (c.à.d. $P(n + 1)$ est vraie)

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par récurrence.

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis déterminer leurs négations :

$$1 \ p_1 : " \sqrt{2} \in \mathbb{N} "$$

$$2 \ p_2 : " \sqrt{(-2)^2} = -2^2 "$$

$$3 \ p_3 : " \pi = \frac{22}{7} "$$

$$4 \ p_4 : " \mathbb{N} \subset \mathbb{R} "$$

$$5 \ p_5 : " 3 \text{ est un nombre impair } "$$

$$6 \ p_6 : " \sqrt{9} = -3 \text{ et } (-3)^2 = 9 "$$

7 p_7 : " $\sqrt{3} + \sqrt{7} > 3$ ou $\pi \in \mathbb{Q}$ "

8 p_8 : " $\sqrt{12} \neq 3$ et $\sqrt{4} = 2$ "

9 p_9 : " $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$ ou $\pi \in \mathbb{R}$ "

5-2/ Exercice 2

1. Écrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :

1 (P_1) : "Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que $n + m = 0$ "

2 (P_2) : "Il existe un réel M tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leq M$ "

3 (P_3) : "Tout réel inférieur ou égal à 1 est négatif"

4 (P_4) : "Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation $x^2 = 2$ "

5 (P_5) : "La fonction f est constante sur \mathbb{R} "

6 (P_6) : "Tout entier naturel est pair ou impair"

7 (P_7) : "L'équation $\sin(x) = x$ a une et une seule solution dans \mathbb{R} "

8 (P_8) : "Pour tout réel x , il existe un unique entier relatif p tel que $p \leq x < p + 1$ "

9 (P_9) : "Il existe au moins un élément réel α tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a $\alpha \leq x$ "

5-3/ Exercice 3

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis déterminer leurs négations :

1 p_1 : $(\exists x \in \mathbb{N}) x^2 = 36$

2 p_2 : $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq x$

3 p_3 : $(\forall n \in \mathbb{N}) n(n+1)$ est pair

4 p_4 : $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x \leq y$

5 p_5 : $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) x \leq y$

6 p_6 : $(\forall x \in \mathbb{N}) (\exists y \in \mathbb{R}) x = y^2$

7 p_7 : $(\exists x \in \mathbb{N}) (\forall y \in \mathbb{R}) x = y^2$

8 p_8 : $\pi = 3,14 \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

9 p_9 : $(\forall a \in \mathbb{N}) a$ premier $\Rightarrow a$ impair

10 p_{10} : $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

11 p_{11} : $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

5-4/ Exercice 4

Soit P la proposition suivante : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 5x + 4 \neq 0$

1. Donner la négation de la proposition P .

2. En déduire que P est fausse.

Soit P la proposition suivante : $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x > 0$.

3. Déterminer la vérité de la proposition P .

4. Donner la négation de P .

5-5/ Exercice 5

Raisonnement par le contre-exemple

1. Montrer que la proposition suivante est fausse : " $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x$ ".
2. Montrer que la proposition suivante est fausse : " $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2$ est pair".
3. Montrer que la proposition suivante est fausse : " $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n^2 + n + 1$ est un entier premier".

Raisonnement par l'absurde

5. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{x^2+1}{x^2-1} \neq 1$.
6. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \sqrt{x^2 + 1} \neq x + 1$.
7. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{x} \neq \frac{x+2}{\sqrt{x+4}}$.
8. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5-6/ Exercice 6

Raisonnement par les équivalences

1. Soient a et b deux réels. Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* : x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$.

Raisonnement par la disjonction des cas

5. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $x^2 + |x - 1| + 1 = 0$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : n(n + 1)$ est un nombre pair.

5-7/ Exercice 7

Raisonnement par la contraposée

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $x \neq y \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$.
2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$.
3. Soient $(x, y) \in]1; +\infty[\times]1; +\infty[$. Montrer que $x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$.

Raisonnement par la récurrence

4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 7^n - 1$ est divisible par 6.
5. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n-1)}{2}$.