



Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM – Eco

Séance 1 (Notions de logique)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

## Sommaire

### I- Définitions

1-1/ Proposition

1-2/ Fonction propositionnelle

1-3/ Quantificateurs

### II- Opérations sur les propositions

2-1/ La négation d'une proposition

2-2/ La conjonction de deux propositions – La disjonction de deux propositions

2-3/ L'implication de deux propositions

2-4/ L'équivalence de deux propositions

2-5/ Les lois logiques

### III- Types de raisonnements

3-1/ Raisonnement par contre exemple

3-2/ Raisonnement par des équivalences successives

3-3/ Raisonnement déductif

3-4/ Raisonnement par la contraposée

3-5/ Raisonnement par la disjonction des cas

3-6/ Raisonnement par l'absurde

3-7/ Raisonnement par la récurrence

### V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

5-7/ Exercice 7

---

## I- Définitions

### 1-1/ Proposition

tout énoncé mathématique (texte mathématique) qui a un sens pouvant être vrai ou faux (mais pas les deux en même temps) est une proposition.

On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ..etc...

#### Exemple

### 1-2/ Fonction propositionnelle

On appelle une fonction propositionnelle, tout énoncé mathématique contenant une variable x ou plusieurs variables (x,y, z,...), et qui appartiennent à des ensembles déterminés.

On note P(x) ou P(x,y;z,...).

### 1-3/ Quantificateurs

#### Quantificateur universel

L'expression suivante « pour tout x de E la proposition Q(x) est vraie », on la note : « $\forall x \in E, Q(x)$ » .

Le symbole  $\forall$  s'appelle quantificateur universel et il se lit :

- pour tout
- quel que soit

Exemple :

- « $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$ »

#### Quantificateur existentiel

L'expression suivante « il existe un x de E tel que la proposition Q(x) est vraie », on la note : « $\exists x \in E, Q(x)$ » .

Le symbole  $\exists$  s'appelle quantificateur existentiel et il se lit :

- il existe

Exemple :

- « $\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 \geq 1$ »

#### Symbole $\exists!$

L'expression suivante « il existe un unique x de E tel que la proposition Q(x) est vraie », on la note : « $\exists! x \in E, Q(x)$ » .

Exemple :

- « $\exists! x \in \mathbb{R}, x + 2 = 1$ »

## Remarques

- L'ordre des quantificateurs de même type (universel ou bien existentiel) ne change pas le sens de la fonction propositionnelle.
- L'ordre des quantificateurs de types différents (universel et existentiel) change le sens de la fonction propositionnelle.
- La négation du quantificateur  $\forall$  est le quantificateur  $\exists$ .
- La négation du quantificateur  $\exists$  est le quantificateur  $\forall$ .
- Les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E \Leftrightarrow \forall x, y \in E \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E \times E$$

- Les écritures suivantes sont équivalentes :

$$\exists x \in E, \exists y \in E \Leftrightarrow \exists x, y \in E \Leftrightarrow \exists (x, y) \in E \times E$$

## II- Opérations sur les propositions

### 2-1/ La négation d'une proposition

La négation d'une proposition  $P$  est la proposition qu'on note  $\overline{P}$  ou non  $P$  tel que les valeurs de vérité de  $P$  et  $\overline{P}$  sont opposées.

$p$	$\overline{p} = \neg p$
1	0
0	1

### 2-2/ La conjonction de deux propositions – La disjonction de deux propositions

#### La conjonction de deux propositions

La conjonction de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition notée  $P \wedge Q$  ou bien  $P$  et  $Q$ . Elle est vraie seulement dans le cas où  $P$  et  $Q$  sont toutes les deux vraies.

$p$	$q$	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

#### La disjonction de deux propositions

La disjonction de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition notée  $P \vee Q$  ou bien  $P$  ou  $Q$ . Elle est fautive seulement dans le cas où  $P$  et  $Q$  sont toutes les deux fausses.

P	q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

## Propriétés

La conjonction et la disjonction sont commutatives :  $P \wedge Q = Q \wedge P$  ;  $P \vee Q = Q \vee P$

La conjonction et la disjonction sont associatives :

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R) ; (P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

La négation de la conjonction :  $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$

La négation de la disjonction :  $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$

La conjonction est distributive sur la disjonction :  $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

La disjonction est distributive sur la conjonction :  $P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

## 2-3/ L'implication de deux propositions

### Définition

L'implication de deux propositions  $P$  puis  $Q$  est la proposition  $\overline{P} \vee Q$  ; qu'on note par  $P \Rightarrow Q$ .

On lit  $P$  implique  $Q$ .

La proposition  $P$  s'appelle les données (ou hypothèses) de l'implication.

La proposition  $Q$  s'appelle la conclusion de l'implication.

P	q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

## Propriétés

L'implication est transitive :  $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

La négation de l'implication :  $\overline{(P \Rightarrow Q)} = P \wedge \overline{Q}$

La contraposée :  $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

## 2-4/ L'équivalence de deux propositions

### Définition

L'équivalence de deux propositions  $P$  et  $Q$  est la proposition  $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$  ; qu'on note par  $P \Leftrightarrow Q$ .

On lit  $P$  est équivalente à  $Q$  ou bien  $P$  si et seulement si  $Q$ .

P	q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

## Propriétés

L'équivalence est transitive :  $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$

$$(P \Leftrightarrow Q) = (Q \Leftrightarrow P)$$

$$(P \Leftrightarrow Q) = (\overline{P} \Leftrightarrow \overline{Q})$$

$$\overline{(P \Leftrightarrow Q)} = \overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)} = (P \wedge \overline{Q}) \vee (\overline{P} \wedge Q)$$

## 2-5/ Les lois logiques

### Définition

Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions qui la constitue.

## III- Types de raisonnements

### 3-1/ Raisonnement par contre exemple

Pour prouver que la propriétés suivante est fausse  $(\forall x \in E, P(x))$ , il suffit de prouver que  $(\exists x \in E, \overline{P(x)})$  est vraie (c.à.d. de trouver un élément x de E qui ne vérifie pas P(x), c'est ce qu'on appelle un contre exemple).

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par contre exemple.

### Exemple

### 3-2/ Raisonnement par des équivalences successives

Pour démontrer que l'équivalence suivant  $P \Leftrightarrow Q$  est vrai, on démontrer que :  $P \Leftrightarrow Q_1$  et  $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$  et  $Q_2 \Leftrightarrow Q_3$  et ... et  $Q_n \Leftrightarrow Q$ .

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par des équivalences successives.

### 3-3/ Raisonnement déductif

Si on a l'implication  $P \Rightarrow Q$  est vraie et on a dans un exercice comme donnée la proposition P donc on déduit que la proposition Q est vraie.

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par déduction.

### 3-4/ Raisonnement par la contraposée

Pour démontrer l'implication suivante  $P \Rightarrow Q$ , il suffit de démontrer l'implication suivante  $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ .

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par la contraposée.

### 3-5/ Raisonnement par la disjonction des cas

Lorsqu'on utilise plusieurs cas dans une démonstration, le raisonnement utilisé s'appelle raisonnement par disjonction des cas.

### 3-6/ Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition  $Q$  (conclusion ou résultat), et on a parmi les données la proposition  $P$ .

On suppose que  $\overline{Q}$  et au cours de la démonstration on trouve une contradiction

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par l'absurde.

### 3-7/ Raisonnement par la récurrence

Soient  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $P(n)$  une relation portant sur les entiers naturels  $n$  tel que  $n \geq n_0$ .

Pour démontrer que la relation  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \geq n_0$ , on utilise les étapes suivantes :

- On vérifie que  $P(n)$  est vraie pour  $n = n_0$  (c.à.d.  $P(n_0)$  est vraie).
- On suppose que  $P(n)$  est vraie pour  $n$  avec  $n \geq n_0$ , la supposition s'appelle hypothèse de récurrence
- On démontre que la relation  $P(n)$  est vraie pour  $n + 1$  ( c.à.d.  $P(n + 1)$  est vraie )

Ce mode de raisonnement s'appelle raisonnement par récurrence.

## V- Exercices

### 5-1/ Exercice 1

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis déterminer leurs négations :

- 1  $p_1$  : "  $\sqrt{2} \in \mathbb{N}$  "
- 2  $p_2$  : "  $\sqrt{(-2)^2} = -2^2$  "
- 3  $p_3$  : "  $\pi = \frac{22}{7}$  "
- 4  $p_4$  : "  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$  "
- 5  $p_5$  : " 3 est un nombre impair "
- 6  $p_6$  : "  $\sqrt{9} = -3$  et  $(-3)^2 = 9$  "
- 7  $p_7$  : "  $\sqrt{3} + \sqrt{7} > 3$  ou  $\pi \in \mathbb{Q}$  "
- 8  $p_8$  : "  $\sqrt{12} \neq 3$  et  $\sqrt{4} = 2$  "
- 9  $p_9$  : "  $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$  ou  $\pi \in \mathbb{R}$  "

### 5-2/ Exercice 2

1. Écrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs :
- 1 ( $P_1$ ) : "Pour tout entier naturel  $n$  il existe un entier naturel  $m$  tel que  $n + m = 0$ "
- 2 ( $P_2$ ) : "Il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $x \leq M$ "
- 3 ( $P_3$ ) : "Tout réel inférieur ou égal à 1 est négatif"
- 4 ( $P_4$ ) : "Il n'existe aucun nombre rationnel solution de l'équation  $x^2 = 2$ "

- 5 ( $P_5$ ) : "La fonction  $f$  est constante sur  $\mathbb{R}$ "  
 6 ( $P_6$ ) : "Tout entier naturel est pair ou impair"  
 7 ( $P_7$ ) : "L'équation  $\sin(x) = x$  a une et une seule solution dans  $\mathbb{R}$ "  
 8 ( $P_8$ ) : "Pour tout réel  $x$ , il existe un unique entier relatif  $p$  tel que  $p \leq x < p + 1$ "  
 9 ( $P_9$ ) : "Il existe au moins un élément réel  $\alpha$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ , on a  $\alpha \leq x$ "

### 5-3/ Exercice 3

1. Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes puis déterminer leurs négations :

- 1  $p_1$  :  $(\exists x \in \mathbb{N}) x^2 = 36$   
 2  $p_2$  :  $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \geq x$   
 3  $p_3$  :  $(\forall n \in \mathbb{N}) n(n+1)$  est pair  
 4  $p_4$  :  $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) x \leq y$   
 5  $p_5$  :  $(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) x \leq y$   
 6  $p_6$  :  $(\forall x \in \mathbb{N}) (\exists y \in \mathbb{R}) x = y^2$   
 7  $p_7$  :  $(\exists x \in \mathbb{N}) (\forall y \in \mathbb{R}) x = y^2$   
 8  $p_8$  :  $\pi = 3,14 \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$   
 9  $p_9$  :  $(\forall a \in \mathbb{N}) a$  premier  $\Rightarrow a$  impair  
 10  $p_{10}$  :  $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$   
 11  $p_{11}$  :  $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$

### 5-4/ Exercice 4

Soit  $P$  la proposition suivante :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - 5x + 4 \neq 0$

- Donner la négation de la proposition  $P$ .
- En déduire que  $P$  est fausse.

Soit  $P$  la proposition suivante :  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x > 0$ .

- Déterminer la vérité de la proposition  $P$ .
- Donner la négation de  $P$ .

### 5-5/ Exercice 5

#### Raisonnement par le contre-exemple

- Montrer que la proposition suivante est fausse : " $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq x$ ".
- Montrer que la proposition suivante est fausse : " $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^2$  est pair".
- Montrer que la proposition suivante est fausse : " $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : n^2 + n + 1$  est un entier premier".

#### Raisonnement par l'absurde

- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) : \frac{x^2+1}{x^2-1} \neq 1$ .
- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : \sqrt{x^2+1} \neq x+1$ .
- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \sqrt{x} \neq \frac{x+2}{\sqrt{x+4}}$ .

8. Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

## 5-6/ Exercice 6

### Raisonnement par les équivalences

1. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Montrer que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .
2. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^* : x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$ .

### Raisonnement par la disjonction des cas

5. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $x^2 + |x - 1| + 1 = 0$ .
6. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N} : n(n + 1)$  est un nombre pair.

## 5-7/ Exercice 7

### Raisonnement par la contraposée

1. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $x \neq y \Rightarrow (x + 1)(y - 1) \neq (x - 1)(y + 1)$ .
2. Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$ .
3. Soient  $(x, y) \in ]1; +\infty[ \times ]1; +\infty[$ . Montrer que  $x \neq y \Rightarrow x^2 - 3x \neq y^2 - 3y$ .

### Raisonnement par la récurrence

4. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 7^n - 1$  est divisible par 6.
5. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n-1)}{2}$ .