

Sommaire**I- Rappels**

1-1/ Produit scalaire

1-2/ Base et repère (orthonormé direct)

**II- Expression analytique de  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u}\|$** **III- Formules trigonométriques**3-1/ Formules de  $\overline{\sin(\vec{u}, \vec{v})}$  et  $\overline{\cos(\vec{u}, \vec{v})}$ 

3-2/ Surface d'un triangle et d'un parallélogramme

**IV- Droite dans le plan (Étude analytique)**

4-1/ Vecteur normal

4-2/ Ensemble des points  $M$  tel que  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ 4-3/ Équation cartésienne de la droite  $D(A, \vec{n})$ 

4-4/ Orthogonalité de deux droites

4-5/ Distance d'un point à une droite

**V- Cercle dans le plan (Étude analytique)**5-1/ Équation cartésienne du cercle  $C(\Omega(a, b); r)$ 5-2/ Équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$ 

5-3/ Présentation paramétrique d'un cercle

5-4/ Étude l'ensemble des points  $\{M(x, y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$ 

5-5/ Étude les positions relatives d'un cercle et d'une droite

5-6 Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle

**VI- Exercices**

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

6-5/ Exercice 5

6-6/ Exercice 6

## I- Rappels

### 1-1/ Produit scalaire

#### Définition

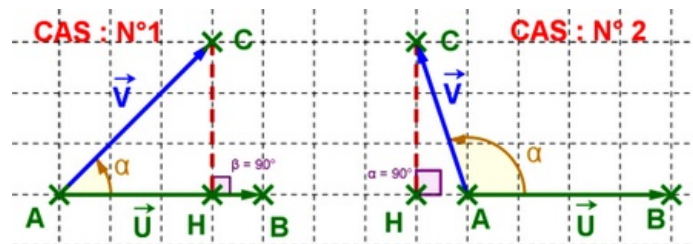
$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

Si  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Si  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $H$  la projection orthogonale de  $C$  sur la droite  $(AB)$  ( $A \neq B$  car  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ), alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont même sens (Cas n°1).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont les sens opposés (Cas n°2).



$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$  est appelé le carré scalaire de  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

Le nombre réel positif  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$  est appelé la norme du vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ , on le note  $\|\vec{u}\|$  ou  $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$  ( $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ ).

#### Propriétés

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1- La forme trigonométrique du produit scalaire tel que  $\overline{(\vec{u} \cdot \vec{v})} = \overline{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})} \equiv \alpha \pmod{2\pi}$  est

:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \alpha$  ou encore  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \alpha$ .

2- Symétrie du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3. Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v})\end{aligned}$$

4- Positivité du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$

5- Produit scalaire est non dégénéré :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

6- Orthogonalité de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

## 1-2/ Base et repère (orthonormé direct)

$\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs non colinéaires du plan ( $P$ ).

Le couple  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  s'appelle base du plan, on dit que le plan ( $P$ ) est rapporté à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$ .

O est un point de ( $P$ ) et  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base de ( $P$ ).

Le triplet  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  s'appelle repère de ( $P$ ), on dit que le plan est rapporté au repère

$R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  ou encore le plan ( $P$ ) est muni du repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée si et seulement si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ ,

dans ce cas le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère orthonormé.

$B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée directe si et seulement si  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée et  $\overline{(\vec{i} \cdot \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ , dans ce cas le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère orthonormé direct.

## II- Expression analytique de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$

### Propriété

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan ( $P$ ).

On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$

### Exemple

## III- Formules trigonométriques

3-1/ Formules de  $\sin(\overline{(\vec{u}, \vec{v})})$  et  $\cos(\overline{(\vec{u}, \vec{v})})$

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan  $(P)$  avec  $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$ .

On a :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

### 3-2/ Surface d'un triangle et d'un parallélogramme

$ABCD$  est un parallélogramme dans le plan  $(P)$ .

La surface  $S_{ABC}$  du triangle  $ABC$  est :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$ .

La surface  $S_{ABCD}$  du parallélogramme  $ABCD$  est :  $S_{ABCD} = \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$ .

### Démonstration

## IV- Droite dans le plan (Étude analytique)

### 4-1/ Vecteur normal

#### Définition

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan  $(P)$ .

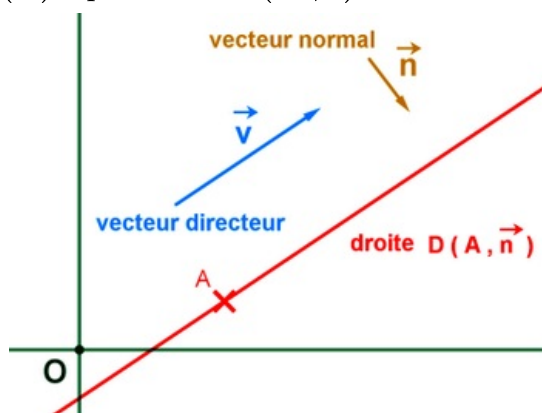
Tout vecteur  $\vec{n}$  non nul orthogonal au vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite  $D(A, \vec{u})$  s'appelle vecteur normal à la droite  $D(A, \vec{u})$ .

#### Remarques

Les vecteurs  $\alpha \vec{n}$  ( $\alpha \neq 0$ ) sont normaux à la droite  $D(A, \vec{u})$ .

$\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont normaux à la droite  $D(A, \vec{u})$ , donc  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires.

$\vec{n}(a, b)$  normal à la droite  $(D)$  équivaut à  $\vec{u}(-b, a)$  est un vecteur directeur à la droite  $(D)$ .



### 4-2/ Ensemble des points $M$ tel que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

L'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $(P)$  tel que  $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$  est la droite  $D(A, \vec{n})$  passant par  $A$  dont le vecteur normal est  $\vec{n}$ .

## Exemple

### 4-3/ Équation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$

$M(x, y)$  est un point de  $(P)$  appartient à la droite  $D(A(x_A, y_A); \vec{n}(a, b))$  si et seulement si  $ax + by + c = 0$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $c = -ax_A - by_A$

$ax + by + c = 0$  s'appelle l'équation cartésienne de la droite  $D(A; \vec{n})$ .

### 4-4/ Orthogonalité de deux droites

On considère les droites  $(D)$  et  $(D')$  d'équations cartésiennes  $(D) : ax + by + c = 0$  et  $(D') : a'x + b'y + c' = 0$  tel que  $\vec{n}(a, b)$  et  $\vec{n}'(a', b')$  sont les vecteurs normaux respectivement à  $(D)$  et  $(D')$ .

On a :

$$(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

### 4-5/ Distance d'un point à une droite

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan  $(P)$ .

$A$  est un point de  $(P)$  et  $H$  sa projection orthogonale sur  $(D)$ .

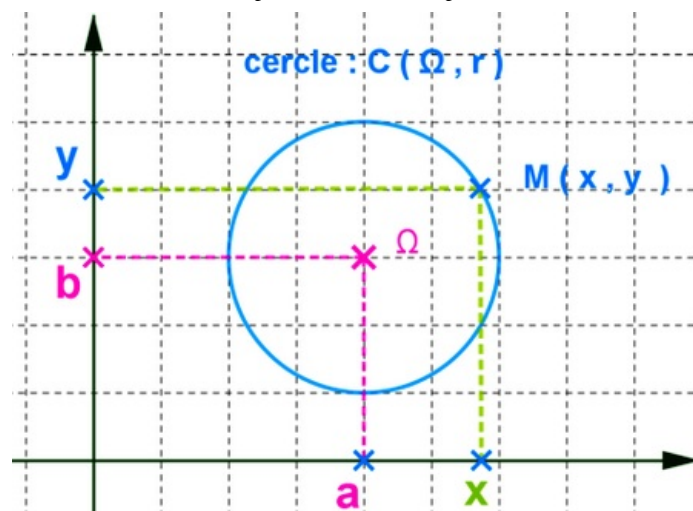
La distance  $AH$  est appelée la distance de  $A$  à  $(D)$ .

On note :  $d(A, (D)) = d = AH$ .

## V- Cercle dans le plan (Étude analytique)

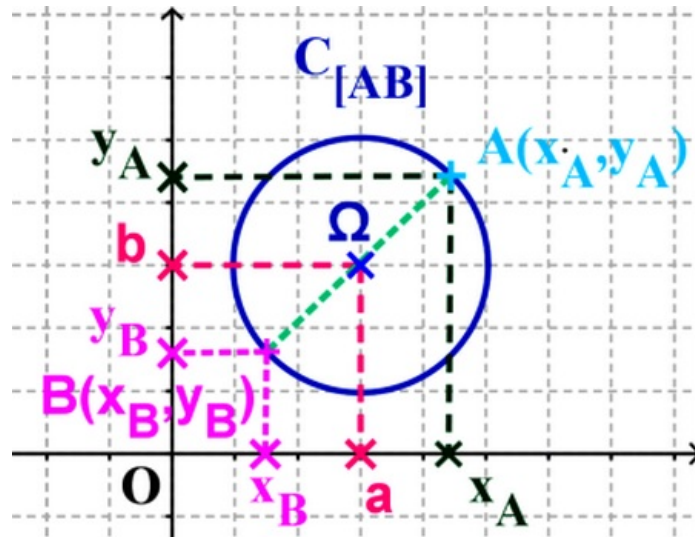
### 5-1/ Équation cartésienne du cercle $C(\Omega(a, b); r)$

Tout cercle  $C(\Omega(a, b); r)$  du plan  $(P)$  a pour équation cartésienne de la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  ou encore  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  avec  $c = a^2 + b^2 - r^2$ .



### 5-2/ Équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

L'équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  est :  $M(x, y) \in C[A; B] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$



### 5-3/ Présentation paramétrique d'un cercle

$C(\Omega(a, b); r)$  est un cercle du plan  $(P)$  rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$ .

Pour tout  $M(x, y)$  du plan  $(P)$ , on a : 
$$\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$$

On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle  $C(\Omega(a, b); r)$ .

### 5-4/ Étude l'ensemble des points $\{M(x, y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$

L'ensemble des points  $M(x, y)$  du plan  $(P)$  qui vérifie  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  est :

Si  $\Delta = a^2 + b^2 - 4c < 0$ , on a  $S = \emptyset$ .

Si  $\Delta = a^2 + b^2 - 4c = 0$ , on a  $S = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$  (un point et un seul).

Si  $\Delta = a^2 + b^2 - 4c > 0$ , on a  $S = (C) = C \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \right)$  (un cercle).

### 5-5/ Étude les positions relatives d'un cercle et d'une droite

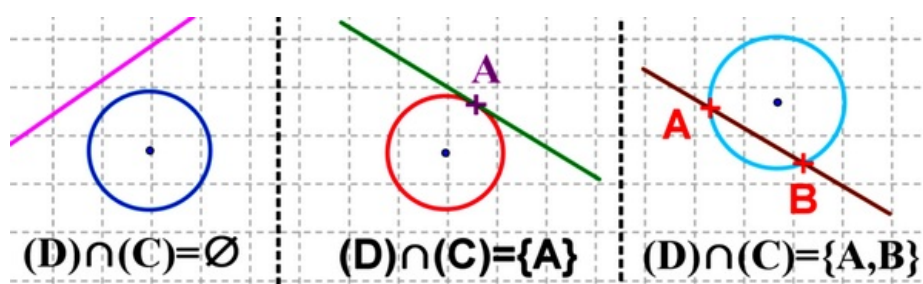
$(D)$  est une droite du plan  $(P)$  et  $(C)$  est un cercle du plan  $(P)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$ .

$(D)$  est à l'extérieure du cercle  $(C)$  si et seulement si  $d(\Omega, (D)) > r$ , dans ce cas

$(D) \cap (C) = \emptyset$ .

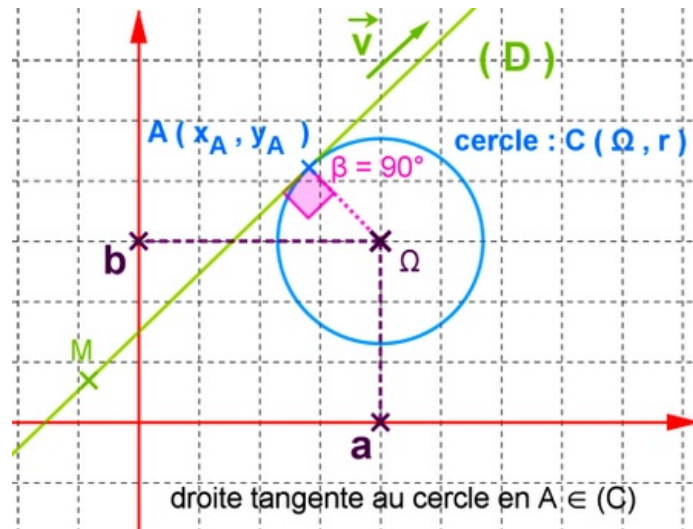
$(D)$  coupe le cercle  $(C)$  si et seulement si  $d(\Omega, (D)) < r$ , dans ce cas  $(D) \cap (C) = \{A, B\}$ .

$(D)$  est tangente au cercle  $(C)$  si et seulement si  $d(\Omega, (D)) = r$ , dans ce cas  $(D) \cap (C) = \{A\}$



## 5-6/ Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle

L'équation cartésienne de la droite  $(D)$  tangente au cercle  $C(\Omega, r)$  en un point  $A(x_A, y_A)$  de  $C(\Omega, r)$  est  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$  ou encore  $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_\Omega - x_A \\ y_\Omega - y_A \end{pmatrix} = 0$ .



## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Soient  $A(3;3)$ ,  $B(1;1)$  et  $C(1;3)$  trois points dans le plan.

- Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .
- Calculer  $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$  et  $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ .
- En déduire  $(\widehat{\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}})$  la mesure de l'angle orienté  $(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}})$ .
- Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .

### 6-2/ Exercice 2

Soient  $A(1;2)$ ,  $B(3;4)$  et  $C(0;3)$  trois points dans le plan.

- Déterminer l'équation de la droite  $(D)$  médiatrice de  $[AB]$ .
- Déterminer l'équation de  $(\Delta)$  la hauteur du triangle  $ABC$  qui passe par  $A$ .
- Déterminer l'équation cartésienne de la droite  $(D)$  passant par  $A$  et de vecteur  $\vec{n}$  normale dans chaque cas :
  - 3-1/  $A(2;3)$  et  $\vec{n}(3;1)$ .
  - 3-2/  $A(-2;1)$  et  $\vec{n}(2;0)$ .

### 6-3/ Exercice 3

- Déterminer l'équation cartésienne de cercle  $(C)$  de diamètre  $[AB]$  avec  $A(-1;1)$  et  $B(1;3)$  par deux méthodes différentes.
- Déterminer l'équation cartésienne de cercle  $(C)$  de centre  $\Omega(1;3)$  et de rayon  $R = 3$ .

## 6-4/ Exercice 4

1. Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble  $E$  des points  $M(x; y)$  vérifiant :

$$1 \quad (E) : x^2 + y^2 - 9 = 0$$

$$2 \quad (E) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

$$3 \quad (E) : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 7 = 0$$

$$4 \quad (E) : x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$$

2. Donner la représentation paramétrique de cercle  $(C)$  de centre  $\Omega$  et de rayon  $R$  dans chaque cas :

$$1 \quad \Omega(2; -1) \text{ et } R = 2$$

$$2 \quad \Omega(0; 2) \text{ et } R = \sqrt{3}$$

## 6-5/ Exercice 5

1. Étudier la position relative du cercle  $(C)$  et de la droite  $(D)$  dans chaque cas :

$$1 \quad \begin{cases} (C) : x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0 \\ (D) : x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} (C) : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0 \\ (D) : 2x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$3 \quad \begin{cases} (C) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 1 = 0 \\ (D) : x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

## 6-6/ Exercice 6

Le plan  $(P)$  est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points :  $A(5; 0)$ ,  $B(7; 4)$ ,  $C(3; 3)$  et  $D(1; 1)$ .

1. Déterminer les coordonnées du point  $I$  milieu du segment  $[AB]$ .
2. Déterminer les coordonnées du point  $J$  milieu du segment  $[CD]$ .
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite  $(\Delta)$  médiatrice du  $[AB]$ .
4. Déterminer l'équation cartésienne du cercle  $(C)$  de diamètre  $[CD]$  de deux façons différentes.
5. Calculer la distance  $d$  entre le point  $J$  et la droite  $(\Delta)$ .
6. Étudier la position relative de la droite  $(\Delta)$  et le cercle  $(C)$ .