Mathématiques : 1Bac S.Exp – STE – STM

Séance 4 (Le produit scalaire dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Produit scalaire

Définition

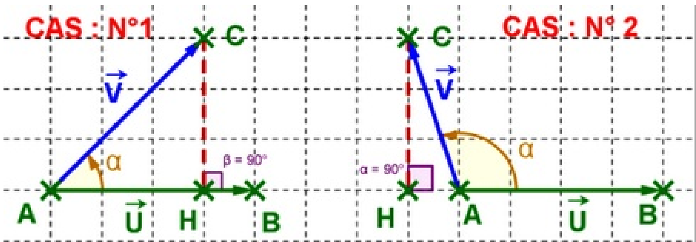
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est noté $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}$ tel que :

Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = 0$.

Si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A \neq B$ car $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$), alors :

- $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens (Cas n°1).
- $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés (Cas n°2).



$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$ est appelé le carré scalaire de $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

Le nombre réel positif $\sqrt{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{u}}$ est appelé la norme du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, on le note $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ ou $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$ ($\overrightarrow{u}^2 = \left\|\overrightarrow{u}^2\right\|$).

Propriétés

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1- La forme trigonométrique du produit scalaire tel que $\overline{\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)} = \overline{\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)} \equiv \alpha \ (2\pi)$ est : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\alpha$ ou encore $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\alpha$.

2- Symétrie du produit scalaire : $\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\,.\,\overrightarrow{u}$

3. Linéarité du produit scalaire :

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$$
$$\vec{w}.\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\vec{w}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{v}$$
$$\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v}=\vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha\times\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$$

4- Positivité du produit scalaire : $\vec{u}^{2}\geq 0$

5- Produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u}.\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

6- Orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

1-2/ Base et repère (orthonormé direct)

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires du plan (P).

Le couple $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ s'appelle base du plan, on dit que le plan (P) est rapporté à la base $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$.

O est un point de (P) et $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base de (P).

Le triplet $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ s'appelle repère de (P), on dit que le plan est rapporté au repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ou encore le plan (P) est muni du repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$).

$B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i}.\vec{j}=0$ et $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$, dans ce cas le repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est appelé repère orthonormé.

$B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée directe si et seulement si $B=\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée et $\overline{\left(\vec{i}.\vec{j}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$, dans ce cas le repère $R=\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est appelé repère orthonormé direct.

II- Expression analytique de $\vec{u}.\vec{v}$ et $\left\|\vec{u}\right\|$

Propriété

$\vec{u}\,(x,y)=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$ et $\vec{v}\,(x',y')=x'\,\vec{i}+y'\,\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P).

On a :

$\vec{u}.\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=xx'+yy'$

$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$

Exemple

III- Formules trigonométriques

3-1/ Formules de $\sin\overline{\left(\vec{u},\vec{v}\right)}$ et $\cos\overline{\left(\vec{u},\vec{v}\right)}$

$\overrightarrow{u}\,(x,y) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v}\,(x',y') = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j}$ deux vecteurs du plan (P) avec $\overline{\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)} \equiv \alpha\ (2\pi)$.

On a :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|.\left\|\overrightarrow{v}\right\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$
$$\sin\alpha = \frac{det\left(\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v}\right)}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|.\left\|\overrightarrow{v}\right\|} = \frac{xy'-yx'}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

3-2/ Surface d'un triangle et d'un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme dans le plan (P).

La surface S_{ABC} du tringle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$.

La surface S_{ABCD} du parallélogramme $ABCD$ est : $S_{ABCD} = \left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|$.

Démonstration

IV- Droite dans le plan (Étude analytique)

4-1/ Vecteur normal

Définition

$D\left(A,\overrightarrow{u}\right)$ est une droite dans le plan (P).

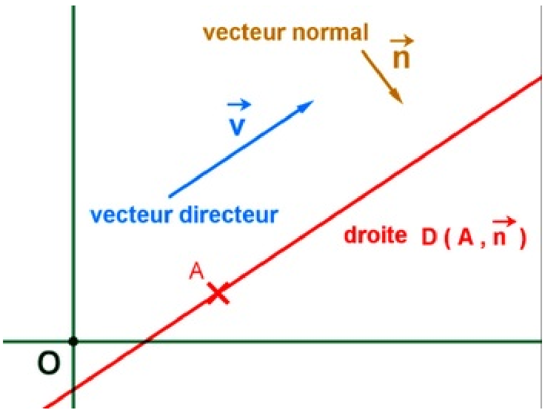
Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul orthogonal au vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite $D\left(A,\overrightarrow{u}\right)$ s'appelle vecteur normal à la droite $D\left(A,\overrightarrow{u}\right)$.

Remarques

Les vecteurs $\alpha\overrightarrow{n}$ $(\alpha \neq 0)$ sont normaux à la droite $D\left(A,\overrightarrow{u}\right)$.

$\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont normaux à la droite $D\left(A,\overrightarrow{u}\right)$, donc $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires .

$\overrightarrow{n}\,(a,b)$ normal à la droite (D) équivaut à $\overrightarrow{u}\,(-b,a)$ est un vecteur directeur à la droite (D).



4-2/ Ensemble des points M tel que $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$

L'ensemble des points $M(x,y)$ de (P) tel que $\overrightarrow{n}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$ est la droite $D\left(A,\overrightarrow{n}\right)$ passant par A dont le vecteur normal est $\overrightarrow{n}$.

Exemple

4-3/ Équation cartésienne de la droite $D\left(A, \overrightarrow{n}\right)$

$M(x, y)$ est un point de (P) appartient à la droite $D\left(A\left(x_A, v\right); \overrightarrow{n}\left(a, b\right)\right)$ si et seulement si $ax + by + c = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c = -ax_A - by_A$

$ax + by + c = 0$ s'appelle l'équation cartésienne de la droite $D\left(A; \overrightarrow{n}\right)$.

4-4/ Orthogonalité de deux droites

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes $(D)\ :\ ax + by + c = 0$ et $(D')\ :\ a'x + b'y + c' = 0$ tel que $\overrightarrow{n}\left(a, b\right)$ et $\overrightarrow{n'}\left(a', b'\right)$ sont les vecteurs normaux respectivement à (D) et (D').

On a :

$$(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

4-5/ Distance d'un point à une droite

$D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ est une droite dans le plan (P).

A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D).

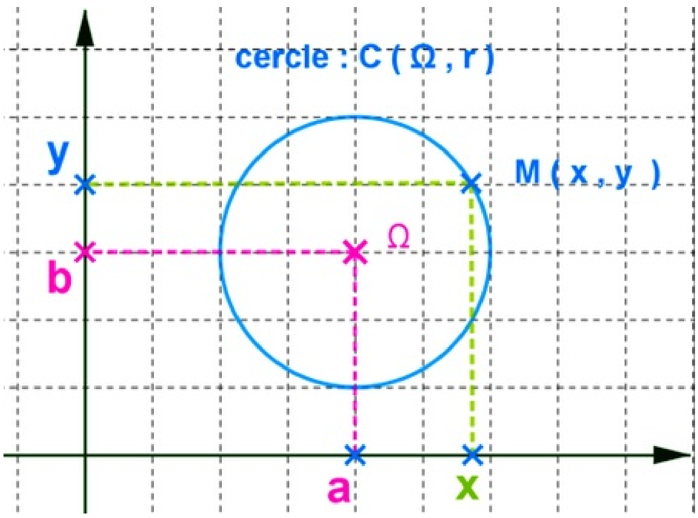
La distance AH est appelée la distance de A à (D).

On note : $d\left(A, (D)\right) = d = AH$.

V- Cercle dans le plan (Étude analytique)

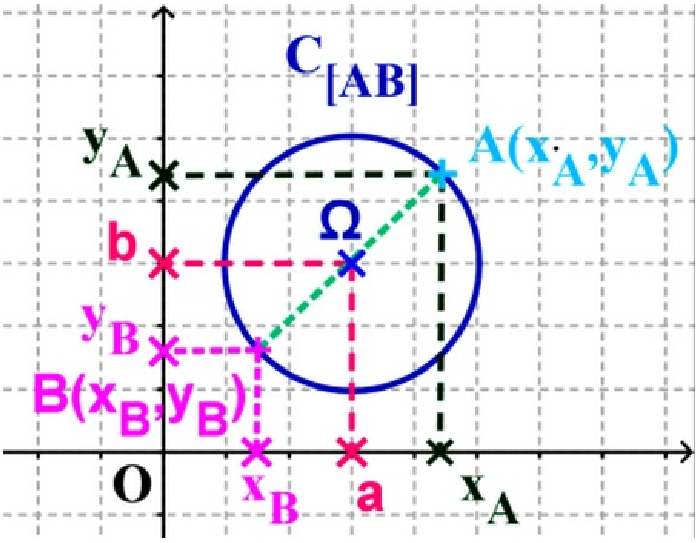
5-1/ Équation cartésienne du cercle $C(\Omega(a, b); r)$

Tout cercle $C(\Omega(a, b); r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ou encore $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.



5-2/ Équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

L'équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ est : $M(x,y) \in C[A;B] \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$



5-3/ Présentation paramétrique d'un cercle

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ tel que $\overline{\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{\Omega M}\right)} \equiv \theta\ (2\pi)$.

Pour tout $M(x,y)$ du plan (P), on a : $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ y = b + R\sin\theta \end{cases}$.

On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle $C(\Omega(a,b);r)$.

5-4/ Étude l'ensemble des points $\left\{M(x,y)/x^2+y^2+ax+by+c=0\right\}$

L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2+y^2+ax+by+c=0$ est :

Si $\Delta = a^2+b^2-4c < 0$, on a $S = \emptyset$.

Si $\Delta = a^2+b^2-4c = 0$, on a $S = \left\{\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)\right\}$ (un point et un seul).

Si $\Delta = a^2+b^2-4c > 0$, on a $S = (C) = C\left(\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right);r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}\right)$ (un cercle).

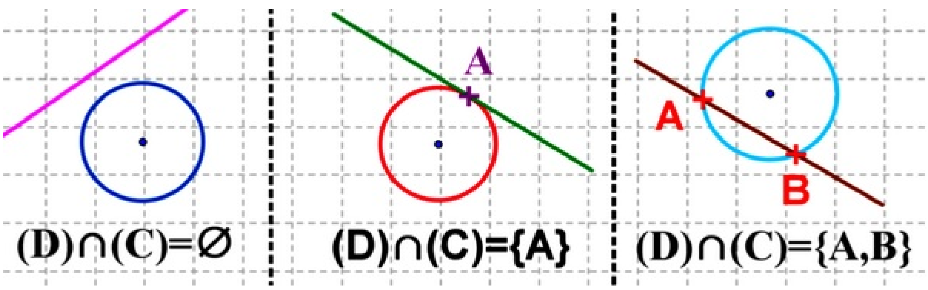
5-5/ Étude les positions relatives d'un cercle et d'une droite

(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre Ω et de rayon r.

(D) est à l'extérieure du cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D)) > r$, dans ce cas $(D)\cap(C) = \emptyset$.

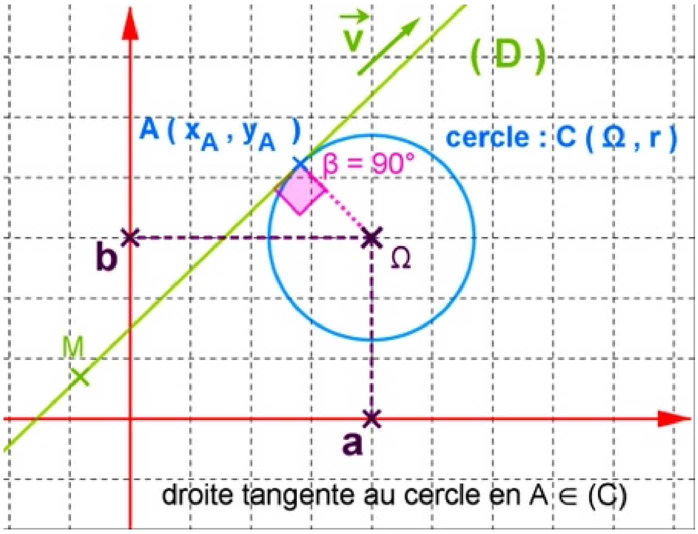
(D) coupe le cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D)) < r$, dans ce cas $(D)\cap(C) = \{A,B\}$.

(D) est tangente au cercle (C) si et seulement si $d(\Omega,(D)) = r$, dans ce cas $(D)\cap(C) = \{A\}$.



5-6/ Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle

L'équation cartésienne de la droite (D) tangente au cercle $C(\Omega, r)$ en un point $A\,(x_A, y_A)$ de $C(\Omega, r)$ est $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$ ou encore $\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x_\Omega - x_A \\ y_\Omega - y_A \end{pmatrix} = 0$.



VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soient $A\,(3;3)$, $B\,(1;1)$ et $C\,(1;3)$ trois points dans le plan.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.
3. En déduire $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}}\right)$ la mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)$.
4. Calculer l'aire du triangle ABC.

6-2/ Exercice 2

Soient $A\,(1;2)$, $B\,(3;4)$ et $C\,(0;3)$ trois points dans le plan.

1. Déterminer l'équation de la droite (D) médiatrice de $[AB]$.
2. Déterminer l'équation de (Δ) la hauteur du triangle ABC qui passe par A.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (D) passant par A et de vecteur $\overrightarrow{n}$ normale dans chaque cas :

- 3-1/ $A\,(2;3)$ et $\overrightarrow{n}\,(3;1)$.
- 3-2/ $A\,(-2;1)$ et $\overrightarrow{n}\,(2;0)$.

6-3/ Exercice 3

1. Déterminer l'équation cartésienne de cercle (C) de diamètre $[AB]$ avec $A(-1\,;1)$ et $B(1\,;3)$ par deux méthode différentes.
2. Déterminer l'équation cartésienne de cercle (C) de centre $\Omega\,(1;3)$ et de rayon $R = 3$.

6-4/ Exercice 4

1. Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble E des points $M(x;y)$ vérifiant :

$$1\ \ (E)\ :\ x^2+y^2-9=0$$
$$2\ \ (E)\ :\ x^2+y^2-2x-6y+6=0$$
$$3\ \ (E)\ :\ x^2+y^2-4x-2y+7=0$$
$$4\ \ (E)\ :\ x^2+y^2+6y+5=0$$

2. Donner la représentation paramétrique de cercle (C) de centre Ω et de rayon R dans chaque cas :

$$1\ \ \Omega\,(2;-1)\ \textit{et}\ R=2$$
$$2\ \ \Omega\,(0;2)\ \textit{et}\ R=\sqrt{3}$$

6-5/ Exercice 5

1. Étudier la position relative du cercle (C) et de la droite (D) dans chaque cas :

$$1\ \begin{cases}(C)\ :\ x^2+y^2+4x-1=0\\(D)\ :\ x-y-3=0\end{cases}$$
$$2\ \begin{cases}(C)\ :\ x^2+y^2-2x+2y-3=0\\(D)\ :\ 2x+y+4=0\end{cases}$$
$$3\ \begin{cases}(C)\ :\ x^2+y^2-4x+2y-1=0\\(D)\ :\ x-y+3=0\end{cases}$$

6-6/ Exercice 6

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère les points : $A(5;0)$, $B(7;4)$, $C(3;3)$ et $D(1;1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
2. Déterminer les coordonnées du point J milieu du segment $[CD]$.
3. Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) médiatrice du $[AB]$.
4. Déterminer l'équation cartésienne du cercle (C) de diamètre $[CD]$ de deux façons différentes.
5. Calculer la distance d entre le point J et la droite (Δ).
6. Etudier la position relative de la droite (Δ) et le cercle (C).