

Sommaire**I- Rappels**

1-1/ Fonction numérique

1-2/ Fonction paire – fonction impaire

1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction  $f$ **II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée**

2-1/ Définitions

2-2/ Extremums d'une fonction

2-3/ Fonction périodique

**III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique**

3-1/ Égalité de deux fonctions

3-2/ Comparaison de deux fonctions

**IV- Composée de deux fonctions**

4-1/ Vocabulaire

4-2/ Définition

4-3/ Monotonie de fonctions composées

**V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions**5-1/ Fonction  $f(x) = ax^3$  ( $a \neq 0$ )5-2/ Fonction  $f(x) = \sqrt{x+a}$ **VI- Exercices**

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

## 6-5/ Exercice 5

## 6-6/ Exercice 6

---

### I- Rappels

#### 1-1/ Fonction numérique

Toute relation  $f$  qui associe chaque élément  $x$  au plus de  $\mathbb{R}$  par un élément  $y$  de  $\mathbb{R}$  est appelée fonction numérique de la variable réelle  $x$ .

On note :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x)$$

Tous les éléments  $x$  de qui ont images par  $f$  constituent un ensemble qu'on l'appelle ensemble de définition (ou encore domaine de définition), on le note  $\mathcal{D}_f$  ou  $D_f$ .

#### 1-2/ Fonction paire – fonction impaire

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

$$f \text{ est paire sur } D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = f(x) \end{cases}$$

$$f \text{ est impaire sur } D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

#### 1-3/ Monotonie d'une fonction numérique

##### définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur un intervalle  $I$ .

$f$  est une fonction croissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$

$f$  est une fonction strictement croissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))$

$f$  est une fonction décroissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$

$f$  est une fonction strictement décroissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$

$f$  est une fonction constante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$

#### 1-4/ Taux d'accroissement d'une fonction $f$

##### Définition

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur un intervalle  $I$ .

Soient  $x, x' \in I$  tel que  $x \neq x'$ , le nombre  $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$  s'appelle le taux d'accroissement de la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x'$ , on le note  $T_f$ .

##### Propriétés

$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

Si  $T_f \leq 0$  alors la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Si  $T_f < 0$  alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

Si  $T_f \geq 0$  alors la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Si  $T_f > 0$  alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

Si  $T_f = 0$  alors la fonction  $f$  est constante sur  $I$ .

## II- Fonction majorée – Fonction minorée – Fonction bornée

### 2-1 Définitions

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $I \subset D_f$ .

Soient  $M, m \in \mathbb{R}$

La fonction  $f$  est majorée par  $M$  sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I ; f(x) \leq M$ .

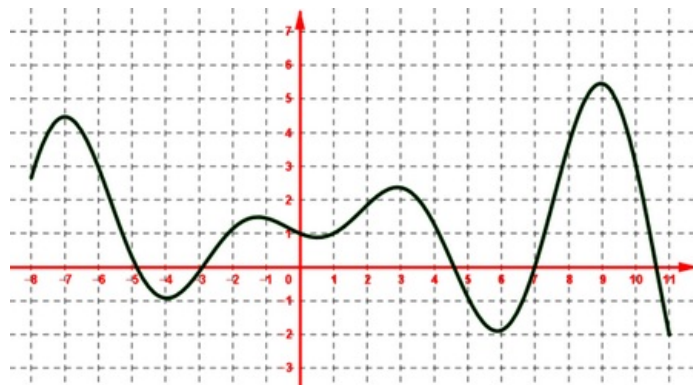
La fonction  $f$  est minorée par  $m$  sur  $I$  si et seulement si  $\forall x \in I ; f(x) \geq m$ .

La fonction  $f$  est bornée sur  $I$  si et seulement si  $f$  est majorée et minorée sur  $I$ .

### Remarque

La fonction  $f$  est bornée sur  $I \Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+ , \forall x \in I : |f(x)| \leq A)$

### Exemple



### 2-2/ Extremums d'une fonction

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  tel que  $x_0 \in D_f$ .

$f(x_0)$  est valeur maximale absolue de  $f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f , f(x) \leq f(x_0)$ .

$f(x_0)$  est valeur minimale absolue de  $f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f , f(x) \geq f(x_0)$ .

### 2-3/ Fonction périodique

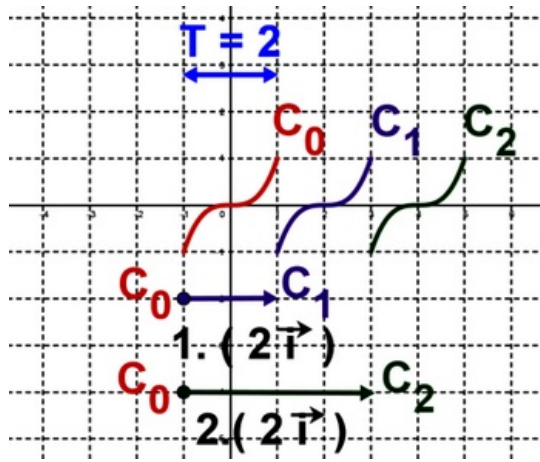
$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

Soit  $T \in \mathbb{R}^{+*}$

La fonction  $f$  est périodique sur  $D_f$  et son période est  $T$  si et seulement si :

①  $x \in D_f \Rightarrow (x + T \in D_f \text{ et } x - T \in D_f)$

②  $\forall x \in D_f : f(x + T) = f(x)$



### III- Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

#### 3-1/ Égalité de deux fonctions

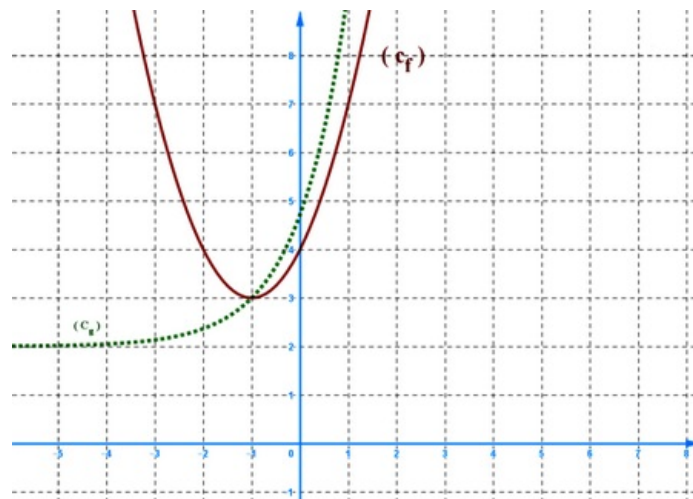
Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions numériques dont les ensembles de définition sont respectivement  $D_f$  et  $D_g$ .

On dit que  $f$  et  $g$  sont égales, et on note  $f = g$ , si 
$$\begin{cases} D_f = D_g \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

#### 3-2/ Comparaison de deux fonctions

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$ . La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est située au dessous de la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  sur  $I$ .
- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) > g(x))$ . La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au dessus de la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  sur  $I$ .
- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$ . La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  et la courbe  $(\mathcal{C}_g)$  sont confondues sur  $I$ .
- $f$  est une fonction positive sur  $D_f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$ . La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  est située au dessus de l'axe des abscisses.
- $f$  est une fonction strictement négative sur  $D_f$  si et seulement si . La courbe  $(\mathcal{C}_f)$  de  $f$  est située strictement au dessous de l'axe des abscisses.



### IV- Composée de deux fonctions

## 4-1/ Vocabulaire

La fonction  $h : x \rightarrow h(x) = g(f(x))$ , on la note par  $h = g \circ f$ , d'où :  
 $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ .

La fonction  $g \circ f$  est appelée la composée des fonction  $f$  et  $g$  dans cet ordre.

On peut faire le diagramme suivant pour  $g \circ f$  :

$$\begin{array}{c} \mathbf{h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}} \\ \mathbf{x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)} \end{array}$$

## 4-2/ Définition

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ .

On pose :  $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ .

La fonction  $h$  définie sur  $D_{g \circ f}$  par  $h(x) = g(f(x))$  est appelée la composée des fonction  $f$  et  $g$  dans cet ordre.

On note  $h = g \circ f$ .

## 4-3/ Monotonie de fonctions composées

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ .

- Si  $f$  et  $g$  ont même monotonie (strictement monotone) respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$ , alors  $g \circ f$  est croissante sur  $D_f$  ( $g \circ f$  est strictement croissante sur  $D_f$ ).

- Si  $f$  et  $g$  ont monotonie (strictement monotone) opposées respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$ , alors  $g \circ f$  est décroissante sur  $D_f$  ( $g \circ f$  est strictement décroissante sur  $D_f$ ).

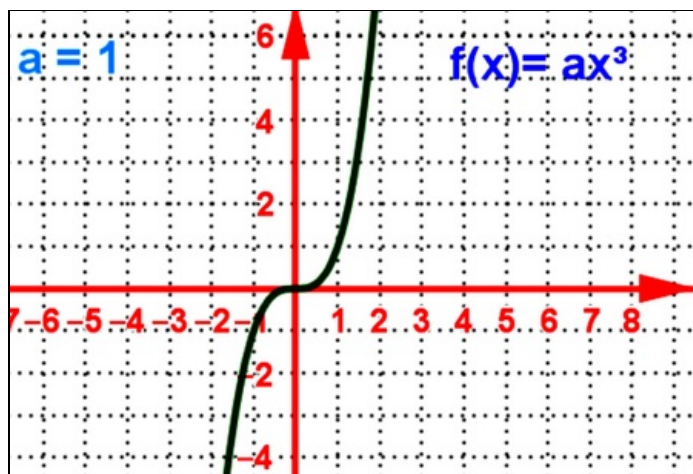
## V- Étude et représentation graphique de certaines fonctions

### 5-1/ Fonction $f(x) = ax^3$ ( $a \neq 0$ )

1er cas ( $a > 0$ )

<b>x</b>	$-\infty$	0	$+\infty$
<b>f(x)</b>		0	

↗ ↘ ↗ ↘



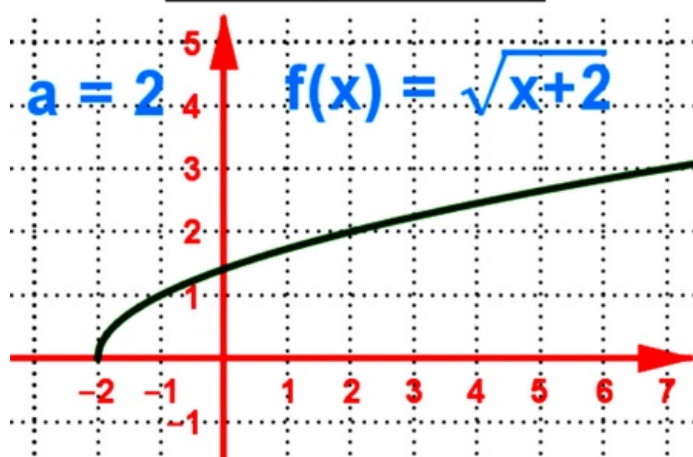
2nd cas ( $a < 0$ )

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f(x)$	↙	$0$	↘



5-2/ Fonction  $f(x) = \sqrt{x+a}$

$x$	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	$0$	↗



## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

1. Montrer que la fonction  $f$  est majorée par  $M$  dans chacune des cas suivantes :

a)  $f(x) = -x^2 + 2x$  et  $M = 1$ .

b)  $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$  et  $M = 3$ .

c)  $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$  et  $M = 2$ .

2. Montrer que la fonction  $f$  est minorée par  $m$  dans chacune des cas suivantes :

a)  $f(x) = x^2 + 4x$  et  $m = -4$ .

b)  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  et  $m = 1$ .

3. Montrer que la fonction  $f$  est bornée par  $M$  et  $m$  dans chacune des cas suivantes :

a)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  et  $M = 0$  et  $m = -1$ .

b)  $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}$  et  $M = 3$  et  $m = 0$ .

### 6-2/ Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x^2 + 2x + 3$

1. Montrer que  $f(-1)$  est le minimum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $g$  la fonction définie par :  $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

2. Montrer que  $g(-1)$  est le maximum de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 6-3/ Exercice 3

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions.

Déterminer  $D_{g \circ f}$  l'ensemble de définition de la fonction  $g \circ f$ , et  $D_{f \circ g}$  l'ensemble de définition de la fonction  $f \circ g$ , et déterminer les expressions  $g \circ f(x)$  et  $f \circ g(x)$ , dans chacune des cas suivantes :

1  $f(x) = x^2$  ;  $g(x) = x^3$

2  $f(x) = x^2 - 5$  ;  $g(x) = \frac{1}{x}$

3  $f(x) = \sqrt{x}$  ;  $g(x) = x^2$

4  $f(x) = \sqrt{x-8}$  ;  $g(x) = x^3$

### 6-4/ Exercice 4

Déterminer les variations de la fonction  $f$  dans chacune des cas suivantes :

1  $f(x) = x^2 + \sqrt{2}$

2  $f(x) = x^3 - 5$

3  $f(x) = \frac{8}{x}$

4  $f(x) = -3\sqrt{x-3} + 5$

5  $f(x) = x^2 - 6$

6  $f(x) = \frac{-\sqrt{3}+1}{x}$

7  $f(x) = \sqrt{x-5} + 6$

8  $f(x) = -6x^3 + 9$

## 6-5/ Exercice 5

En utilisant la propriété de la monotonie de la composée de deux fonction, étudier la monotonie de la fonction  $f$  sur les intervalle  $I$  et  $J$  dans chacune des cas suivantes :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{x^2+1} ; I = \mathbb{R}^+ ; J = \mathbb{R}^-$$

$$2 \quad f(x) = \frac{1}{x^2+3} ; I = \mathbb{R}^+ ; J = \mathbb{R}^-$$

$$3 \quad f(x) = \sin^2(x) ; I = [0; \frac{\pi}{2}] ; J = [\frac{\pi}{2}; \pi]$$

## 6-6/ Exercice 6

1. Représenter graphiquement la fonction  $f$  dans chacune des cas suivantes :

$$1 \quad f(x) = \sqrt{x-2}$$

$$2 \quad f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{-4}{x^3}$$

$$4 \quad f(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$5 \quad f(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

$$6 \quad f(x) = \frac{1}{x^3} + 1$$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions telles que  $f(x) = \frac{4}{x^3}$  et  $g(x) = \sqrt{x+2}$ .

2. Représenter graphiquement  $f$  et  $g$ .
3. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$ .
4. Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) < g(x)$ .
5. Vérifier algébriquement les solutions précédentes.