Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 4-1-2 : Fonctions logarithmiques - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$10X^3 - 7X^2 - 4X + 1 = 0$$

2. En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions de ce qui suit :

$$10(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 4\ln x + 1 = 0$$
$$10(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 4\ln x + 1 > 0$$

2-2/ Exercice 1-2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln\left|\sqrt{x} - 1\right|$

Et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$.

1. Déterminer D_f le domaine de définie de f.
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$ puis dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.
6. Déterminer A le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses et différent de O.
7. Étudier les branches infinies de la courbe $\mathscr{C}_f$.
8. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.

2-3/ Exercice 1-3

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2 \ ; \ x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$;

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.
3. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation géométrique
4. Montrer que $(\forall x > 0)$; $\ln x \leq x - 1$
5. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et vérifier que $f'(1) = 0$
6. Déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f.
7. Construire la courbe da la fonction f.

2-4/ Exercice 1-4

Partie 1

Soit g la fonction définie par $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

1. Déterminer D_g et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variation de g.
3. Déduire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(0) = 0$).

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[-1,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} \ ; \ x \neq 0 \ et \ x \neq -1 \\ f(0) = 1 \ et \ f(-1) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer f que au point 0 et à droite de -1.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de -1.
3. Montrer que $(\forall x \geq 0)$; $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.

Soit x un réel de $]-1;0[$, et on considère la fonction φ définie sur $]-1;0[$ par :

$$\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t))$$

5. Montrer que $(\exists c \in]x;0[)$ $\frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$, et étudier la dérivabilité de f à gauche de 0.
6. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et étudier la branche infinie de $(\mathscr{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
7. Montrer que $(\forall x \in]-1;+\infty[- \{0\})$; $f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$.
8. Dresser le tableau de variation de f.
9. Étudier la position de $(\mathscr{C}_f)$ par apport à (Δ) $y = x$, et construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$.