

Sommaire

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

2-2/ Exercice 1-2

2-3/ Exercice 1-3

2-4/ Exercice 1-4

II- Exercices I

2-1/ Exercice 1-1

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$10X^3 - 7X^2 - 4X + 1 = 0$$

2. En déduire dans \mathbb{R} les solutions de ce qui suit :

$$10(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 4 \ln x + 1 = 0$$

$$10(\ln x)^3 - 7(\ln x)^2 - 4 \ln x + 1 > 0$$

2-2/ Exercice 1-2

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \ln |\sqrt{x} - 1|$

Et soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f .

2. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

4. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f - \{0\}$ puis dresser le tableau de variations de f .

5. Montrer que \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

6. Déterminer A le point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses et différent de O .

7. Étudier les branches infinies de la courbe \mathcal{C}_f .

8. Tracer la courbe \mathcal{C}_f .

2-3/ Exercice 1-3

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 - (x-1)^2; & x \neq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases};$$

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.
3. Calculer les limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et donner une interprétation géométrique
4. Montrer que $(\forall x > 0); \ln x \leq x - 1$
5. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et vérifier que $f'(1) = 0$
6. Dédire le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variation de f .
7. Construire la courbe de la fonction f .

2-4/ Exercice 1-4

Partie 1

Soit g la fonction définie par $g(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

1. Déterminer D_g et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$.
2. Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variation de g .
3. Dédire le signe de $g(x)$ (remarquer que $g(0) = 0$).

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)}; & x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \\ f(0) = 1 \text{ et } f(-1) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer f que au point 0 et à droite de -1 .
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de -1 .
3. Montrer que $(\forall x \geq 0); x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.
4. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0.

Soit x un réel de $] -1; 0[$, et on considère la fonction φ définie sur $] -1; 0[$ par :

$$\varphi(t) = t^2(x - \ln(1+x)) - x^2(t - \ln(1+t))$$

5. Montrer que $(\exists c \in]x; 0]) \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2(1+c)}$, et étudier la dérivabilité de f à gauche de 0.
6. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et étudier la branche infinie de (\mathcal{C}_f) au voisinage de $+\infty$.
7. Montrer que $(\forall x \in] -1; +\infty[- \{0\}); f'(x) = \frac{-g(x)}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$.
8. Dresser le tableau de variation de f .
9. Étudier la position de (\mathcal{C}_f) par rapport à $(\Delta) y = x$, et construire la courbe (\mathcal{C}_f) .