AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 4-1-1 : Fonctions logarithmiques - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Fonction logarithme népérien

1-1/ Définition de la fonction ln

Définition 1

La primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ et qui s'annule en 1 est appelée la fonction logarithme népérienne.

On la note $\ln$.

Remarques

Le domaine de définition de la fonction $\ln$ est $]0;+\infty[$, et $\ln(1) = 0$.

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et de plus :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \ \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

On rappelle que toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive d éfinie sur cet intervalle.

I- Fonction logarithme népérien

Applications

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f\left(x\right)=\ln\left(x+4\right)-\ln\left(25-x^2\right)$$
$$g\left(x\right)=\ln\left(x^2-8x+7\right)$$

I- Fonction logarithme népérien

1-2/ Monotonie de la fonction ln

Proposition 1

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

On a alors :

Pour tout $(x,y)\in\left(]0;+\infty[\right)^2$:

$$\ln x<\ln y\Leftrightarrow x<y \text{ et } \ln x=\ln y\Leftrightarrow x=y$$

Pour tout $x\in]0;+\infty[$:

$$\ln x=0\Leftrightarrow x=1 \text{ et } \ln x>0\Leftrightarrow x>1 \text{ et } \ln x<0\Leftrightarrow x<1$$

Applications

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

$$1\ \ \ln\left(2x-3\right)=\ln\left(4-x\right)$$
$$2\ \ \ln\left(x^2+x\right)=\ln\left(-2x-2\right)$$
$$3\ \ \ln\left(3x^2+4x+2\right)=0$$
$$4\ \ \ln\left(4x-5\right)>\ln\left(2x+3\right)$$

1-3/ Propriétés algébriques

Proposition 2

Pour deux réels strictement positifs x et y on a : $\ln\left(xy\right)=\ln x+\ln y$ (Propriété fondamentale)

De cette propriété fondamentale on peut déduire les propriétés algébriques de la Proposition 3.

Proposition 3

1- Pour tout réel strictement positif x, on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$

2- Pour tout $(x,y)\in\left(]0;+\infty[\right)^2$, on a : $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

3- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tous réels strictement positifs $x_1,x_2,\ldots,x_n$, on a :

$$\ln\left(x_1x_2,\ldots.x_n\right)=\ln\left(x_1\right)+\ln\left(x_2\right)+\ldots+\ln\left(x_n\right)$$

C'est-à-dire :

$$\ln\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)=\sum_{k=1}^n\ln\left(x_k\right)$$

4- Pour tout $x\in]0;+\infty[$, et pour tout $r\in\mathbb{Q}$, on a : $\ln\left(x^r\right)=r\ln x$

Remarques

1- Soit a et b deux réels strictement négatifs.

On a alors $ab > 0$ et $\frac{a}{b} > 0$.

11 s'ensuit donc : $\ln(ab) = \ln|a| + \ln|b|$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln|a| - \ln|b|$

2- On a pour tout $x \in]0;+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln x \text{ et } \ln\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\ln x$$

1-4/ Limites usuelles

Proposition 4

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$$

1-5/ Tableau de variations de la fonction ln

Proposition 5

La fonction ln est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

L'équation $\ln(x) = 1$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On la note e :

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Remarques

À l'aide de la calculatrice, on trouve comme valeur approchée de e : 2,718281828

On a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $ln(e^r) = r$

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$		$+$		
$\ln(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1-6/ Courbe de la fonction ln

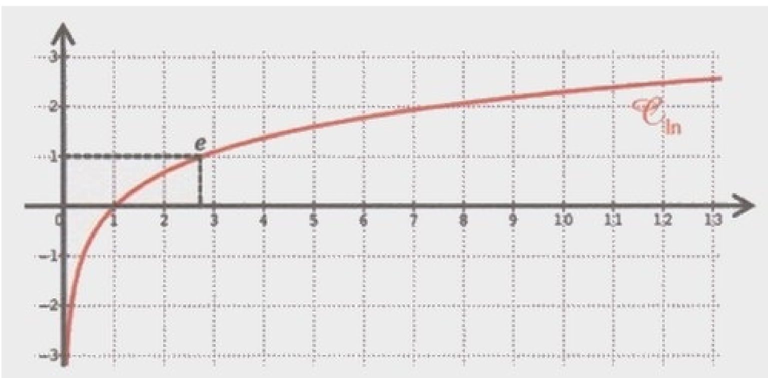
Proposition 6

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln dans un repère orthonormé. Alors :

La courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote.

La courbe $\mathscr{C}$ admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

La courbe $\mathscr{C}$ est concave sur $]0;+\infty[$.



1-7/ Limites fondamentales

Proposition 7

On a :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0 \;;\; \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \;;\; \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

On a pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$$

Applications

Calculer les limites suivantes :

1 $\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x}\ln x =$ 2 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}} =$ 3 $\lim_{x\to +\infty} x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) =$ 4 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^{2017}+x+1)}{x} =$ 5 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x+3} =$	6 $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} =$ 7 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\ln\lvert x^2-1\rvert} =$ 8 $\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3}\ln\left(\frac{x}{3}\right) =$ 9 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[6]{\ln(x^2+3)}}{\sqrt[7]{x\sqrt{x}+1}} =$

1-8/ Dérivée logarithmique

Proposition 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que $(\forall x \in I)$, $u(x) \neq 0$.

Alors la fonction $x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I, et on a : $(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Applications

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$1 \;\; f(x) = \ln|\ln x|$$
$$2 \;\; g(x) = x.\sqrt[3]{\ln x - 2}$$
$$3 \;\; h(x) = \ln|\cos x|$$
$$4 \;\; k(x) = \ln\left(\frac{1}{2-\ln x}\right)$$

Définition 2

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I)$, $u(x) \neq 0$.

La fonction $\frac{u'}{u}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur l'intervalle I.

Proposition 9

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $(\forall x \in I)$, $u(x) \neq 0$.

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Applications

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives de la fonction f sur l'intervalle I :

$$1\ \ f(x) = \frac{\sin(2x)}{5+\sin^2 x} \quad ; \quad I = \mathbb{R}$$

$$2\ \ f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x} \quad ; \quad I = \mathbb{R}_-^*$$

$$3\ \ f(x) = \frac{\ln x}{x\left(\ln^2(x)-1\right)} \quad ; \quad I = \left]e;+\infty\right[$$

$$4\ \ f(x) = \frac{5x+7}{2x-4} \quad ; \quad I = \left]2;+\infty\right[$$