AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 3-4 : Dérivation et étude des fonctions - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2+1} \ si \ x \geq 0 \\ f(x) = \frac{4}{\pi} Arc\tan\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \ si \ x < 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f en 0.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) < 0$.
4. Dresser le tableau de variation de f. On déterminera les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
5. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé (Unité : $2cm$).

On pose $I = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

6. Montrer que $f(I) \subset I$.

9-2/ Partie 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$: $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left|u_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right| \leq \frac{4}{5}\left|u_n - \frac{\sqrt{3}}{3}\right|$$
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente, et donner sa limite.
4. Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)$; $f\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$

5. Vérifier que $a_0 = 1$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$

6. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \tan\left(\frac{\pi \mathrm{a_n}}{2^{n+2}}\right)$