

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

9-2/ Partie 2

---

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 1} \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{4}{\pi} \text{Arc tan} \left( -x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1. Étudier la continuité de  $f$  en 0.
2. Étudier la dérivabilité de  $f$  en 0.
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$  :  $f'(x) < 0$ .
4. Dresser le tableau de variation de  $f$ . On déterminera les limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$ .
5. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé (Unité : 2cm).

On pose  $I = \left[ \frac{1}{4}; 1 \right]$ .

6. Montrer que  $f(I) \subset I$ .

9-2/ Partie 2

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in I$  :  $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$
2. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left| u_{n+1} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right| \leq \frac{4}{5} \left| u_n - \frac{\sqrt{3}}{3} \right|$$

3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente, et donner sa limite.
4. Montrer que :  $(\forall x \in ]0; \frac{\pi}{2}[) ; f\left(\frac{1}{\tan x}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

5. Vérifier que  $a_0 = 1$ , et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $a_{n+1} = 2^{n+1} - a_n$

6. Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = \tan\left(\frac{\pi a_n}{2^{n+2}}\right)$