

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

8-2/ Exercice 3-2

8-3/ Exercice 3-3

8-4/ Exercice 3-4

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

On considère la fonction f tel que $f(x) = 2x - (x + 1)^{\frac{2}{3}}$.

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f , et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Étudier l'asymptote de la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.

Soit g le prolongement de f à droite de -1 .

3. Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite de -1 .
4. Calculer $f'(x)$, et donner le tableau de variations de f .
5. Montrer que \mathcal{C}_f coupe l'axe des abscisses en à point d'abscisse $\alpha \in]4; 5[$ (On prend $2^{\frac{2}{3}} < 2$).
6. Tracer \mathcal{C}_f .

8-2/ Exercice 3-2

Partie I

On considère la fonction f définie sur $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[) ; f(x) = \text{Arc tan}(\sqrt{\tan x}) \text{ et } f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

1. Montrer que f est continue sur I .
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 .
3. Montrer que f est strictement croissante sur I , et donner le tableau de variations de f .
4. Montrer que \mathcal{C}_f a un point de symétrie $\Omega(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.
5. Résoudre dans I l'équation $(E) : f(x) = x$, et étudier le signe de $f(x) - x$.

6. Tracer \mathcal{C}_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (Unité : 2cm).

Partie II

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit constante.

On suppose que $u_0 \notin \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

8-3/ Exercice 3-3

On considère la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\text{Arctan} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} ; x > -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue à droite du point $x_0 = -1$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

Soit $X \in]0; +\infty[$, on pose $\varphi(t) = t^3 (\text{Arctan} X - X) - X^3 (\text{Arctan} t - t)$.

3. Montrer que φ est dérivable sur l'intervalle $]0; X[$ et calculer la dérivée $\varphi'(t)$.

4. Montrer que $(\exists c \in]0, X[) \frac{\text{Arctan} X - X}{X^3} = \frac{-1}{3(1+c^2)}$.

5. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite du point $x_0 = -1$.

6. Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$(\forall X \in \mathbb{R}^+) \frac{X}{1+X^2} \leq \text{Arctan} X \leq X$$

7. Montrer que :

$$(\forall x \in]1; +\infty[) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} - \text{Arctan} \sqrt{x+1} \right)$$

8. Conclure que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

9. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α , et que $\alpha \in]0; 1[$.

10. Tracer \mathcal{C}_f . (On prend $\alpha \simeq 0,7$)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x^2} - \text{Arctan} x$$

11. Calculer $g'(x)$ et donner le tableau de variations de g .

12. Conclure que $(\forall X \in \mathbb{R}^+) |g(x)| \leq \frac{\pi}{2}$.

13. Montrer que $(\forall X \in]0; 1[) |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$.

On considère la suite numérique $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

14. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < u_n < 1$.
15. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |u_n - \alpha|$.
16. Montrer que $(u_n)_n$ est convergente et calculer sa limite.

8-4/ Exercice 3-4

Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction f ainsi que les intervalles où elle est définie :

1 $f(x) = x^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

2 $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$

3 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

4 $f(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^3$

5 $f(x) = x\sqrt[3]{x^2-1}$

6 $f(x) = \sin x \cdot \cos^3 x$

7 $f(x) = \frac{x^2}{1+x^6}$

8 $f(x) = \sin x \cdot \cos 2x$