



Mathématiques : Tronc Commun

Séance 6 (La droite dans le plan)

Professeur : Mr **ETTOUHAMY Abdelhak**

Sommaire

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

1-2/ Coordonnées d'un point du plan

1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs – Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

II- Déterminant de deux vecteurs

III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

V- Vecteur directeur d'une droite

VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

6-2/ Équation cartésienne d'une droite

6-3/ Étude de l'ensemble des points $\{M(x, y) / ax + by + c = 0\}$

VII- Droites parallèles dans le plan

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

Définition

Soient O , I et J trois points non alignés du plan (P),

on pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

- le triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) est appelé repère du plan (P)

- le point O est appelé l'origine du repère.

- Le couple (\vec{i}, \vec{j}) est appelé une base du plan (P).

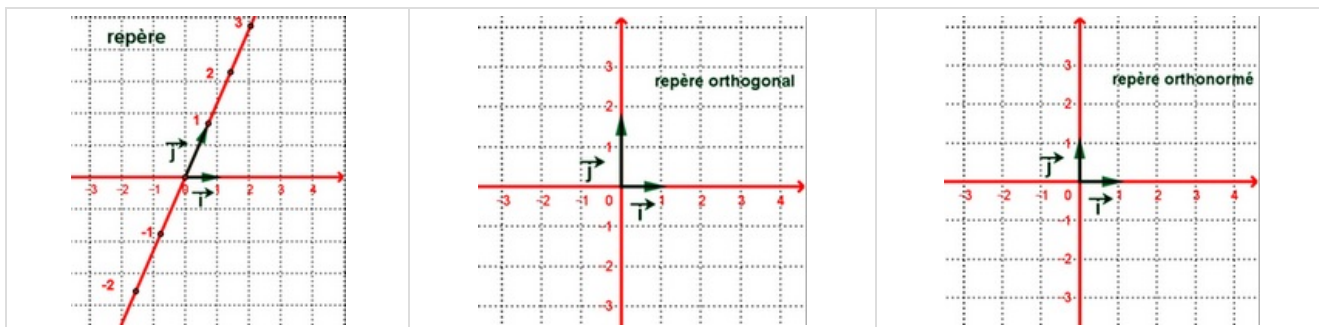
- la droite (OI) s'appelle l'axe des abscisses.

- la droite (OJ) s'appelle l'axe des ordonnées.

- Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthogonal

- Si $(OI) \perp (OJ)$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, alors le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé .

Exemples



1-2/ Coordonnées d'un point du plan

Le plan (P) est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- Pour tout point M du plan (P), il existe un et un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$.

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du point M .

Le nombre x est appelé abscisse du point M .

Le nombre y est appelé ordonnée du point M .

Ot on écrit $M(x, y)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Pour tout vecteur \vec{u} du plan (P), il existe un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du vecteur \vec{u} .

Le nombre x est appelé abscisse du vecteur \vec{u} .

Le nombre y est appelé ordonnée du vecteur \vec{u} .

Où on écrit $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs – Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Le plan (P) est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) .

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ et $I(x_I, y_I)$ sont des points de (P) et $\alpha \in \mathbb{R}$

On a :

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$. on note $\vec{u} + \vec{v}(x + x', y + y')$.

- Le vecteur $\alpha \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$. on note $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y)$.

- Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on note $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

- $I(x_I, y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$, on a $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Exemple

II- Déterminant de deux vecteurs

Le plan (P) est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) .

Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

On note :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires équivaut à $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ($xy' - yx' = 0$)

IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de (P) .

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de (P) .

On a :

La norme (ou la longueur) du vecteur \vec{u} est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

La distance entre A et B est : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

V- Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit (D) une droite passant par A et B

Tout vecteur non nul \vec{u} et colinéaire avec le vecteur \overrightarrow{AB} est appelé vecteur directeur de la droite (D) .

et on note : $D(A, \vec{u})$ ou $D(B, \vec{u})$ ou $D(A, \overrightarrow{AB})$.

Exemple

VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Soit $D(A, \vec{u})$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $A(x_A, y_A)$ et $\vec{u}(a, b)$.

L'écriture $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est appelée représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$.

Exemple

6-2/ Équation cartésienne d'une droite

Définition

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Toute droite $D(A(x_A, y_A); \vec{u})$ du plan (P) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c = x_A y_u - x_u y_A$ et $\vec{u}(-b, a)$ vecteur directeur de la droite (D) .

L'écriture $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D) avec $\vec{u}(-b, a)$ vecteur directeur de la droite (D) .

Exemple

6-3/ Étude de l'ensemble des points

$\{M(x, y) / ax + by + c = 0 ; (a, b) \neq (0, 0)\}$

Définition

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifient $ax + by + c = 0$ est la droite passant par le point $C\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ si $b \neq 0$ (ou $C'\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ si $a \neq 0$) et qui a $\vec{u}(-b, a)$ comme vecteur directeur.

Exemple

VII- Droites parallèles dans le plan

Propriété

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

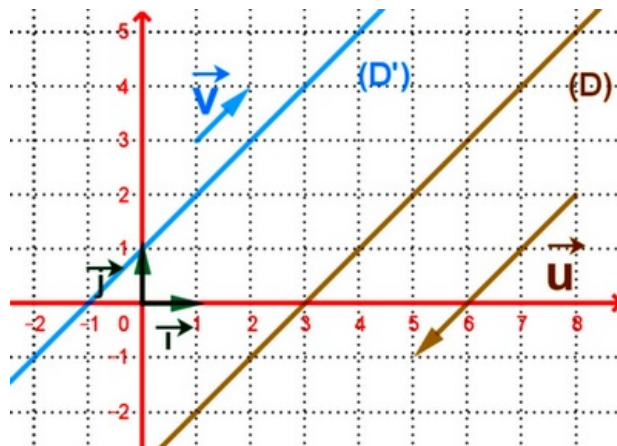
(D) et (D') sont deux droites de (P) tel que $(D) : ax + by + c = 0$ et $(D') : a'x + b'y + c' = 0$.

$(D) \parallel (D')$ équivaut à $ab' - a'b = 0$ ou $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

(D) et (D') sont deux droites de (P) tel que $(D) : y = mx + p$ et $(D') : y = m'x + p'$.

$(D) \parallel (D')$ équivaut à $m = m'$.

Exemple



III- Exercices

8-1/ Exercice 1

On considère les points suivants : $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$ et $C(-2; -1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{BC} .
2. Calculer les distances suivantes : AB , AC et BC .
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\vec{AB}$ et $-3\vec{BC}$.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\vec{AB} + (-3)\vec{BC}$ et $\vec{AB} + \vec{AC}$.
5. Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$.

Soient $\vec{u}(3x + 1; 2)$ et $\vec{v}(4; y - 3)$ deux vecteurs.

6. Déterminer x et y pour que $\vec{u} = \vec{v}$.

8-2/ Exercice 2

On considère les points $A(3; 2)$ et $B(2; -1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $(D) : 3x - y + 6 = 0$.

1. Montrer que $(AB) \parallel (D)$.
 2. Donner une équation cartésienne de la droite (D') passant par A et dirigées par le vecteur $\vec{u}(4; -1)$.
 3. Montrer que (D) et (D') sont sécantes en $E(-1; 3)$.
- Soit $F(a; 0)$ un point du plan.
4. Déterminer le nombre a pour que le quadrilatère $ABFE$ soit un parallélogramme.

8-3/ Exercice 3

Soient $\vec{u}(-1; 2)$, $\vec{v}(-4; 1)$ et $w(2m - 3; 2) / (m \in \mathbb{R})$ trois vecteurs du plan.

1. Étudier la colinéarité de \vec{u} et \vec{v} .
 2. Déterminer la valeur du nombre m pour que \vec{u} et \vec{w} soient colinéaires.
 3. Déterminer la valeur du nombre m pour que \vec{v} et \vec{w} soient colinéaires.
- On considère les points suivants : $A(1; -8)$, $B(11; 7)$, $C(5; -1)$ et $D(7; 2)$.

4. Montrer que \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.
5. Étudier l'alignement des points E , F , et G dans les cas suivants :
 - $E(4; -2)$, $F(5; 1)$ et $G(11; 3)$.
 - $E(-2; 3)$, $F(0; -1)$ et $G(-1; 1)$.

8-4/ Exercice 4

1. Étudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants :
 - 1 $(D) : 6x - 2y + 3 = 0$ et $(D') : 2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$
 - 2 $(D) : x + 2y - 3 = 0$ et $(D') : -x - 2y + 4 = 0$
 - 3 $(D) : 5x - 3y + 2 = 0$ et $(D') : 2x - 3y - 5 = 0$
 - 4 $(D) : -2x - y + 2 = 0$ et $(D') : \frac{1}{2}x - y - 7 = 0$