AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 6 (La droite dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

Définition

Soient O, I et J trois points non alignés du plan (P),

on pose $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$

- le triplet $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé repère du plan (P)

- le point O est appelé l'origine du repère.

- Le couple $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé une base du plan (P).

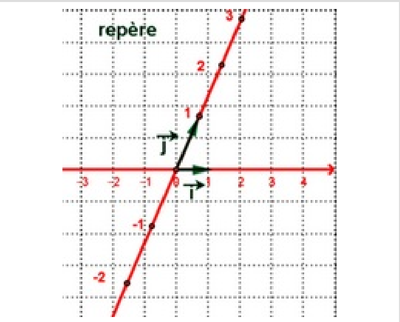
- la droite (OI) s'appelle l'axe des abscisses.

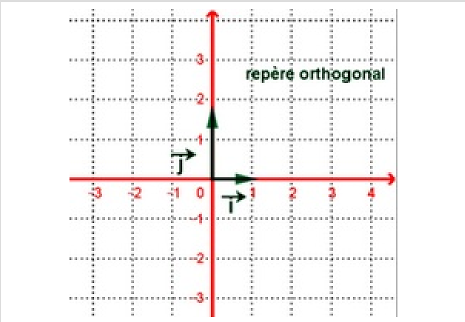
- la droite (OJ) s'appelle l'axe des ordonnés.

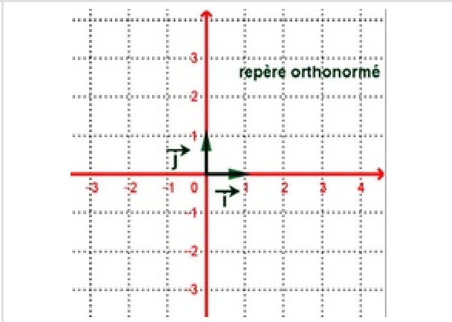
- Si $(OI) \perp (OJ)$, alors le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthogonal

- Si $(OI) \perp (OJ)$ et $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$, alors le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé .

Exemples







1-2/ Coordonnées d'un point du plan

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

- Pour tout point M du plan (P), il existe un et un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du point M.

Le nombre x est appelé abscisse du point M.

Le nombre y est appelé ordonnée du point M.

Ot on écrit $M(x, y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan (P), il existe un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Le nombre x est appelé abscisse du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Le nombre y est appelé ordonnée du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Ot on écrit $\vec{u}\,(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs – Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P).

$A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ et $I\,(x_I, y_I)$ sont des points de (P) et $\alpha \in \mathbb{R}$

On a :

- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$. on note $\vec{u} + \vec{v}\,(x + x', y + y')$.

- Le vecteur $\alpha\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$. on note $\alpha\vec{u}\,(\alpha x, \alpha y)$.

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, on note $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A, y_B - y_A)$

- $I\,(x_I, y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$, on a $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Exemple

II- Déterminant de deux vecteurs

Le plan (P) est rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P).

Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note :

$$det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P) rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à $det\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0\ \ (xy' - yx' = 0)$

IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de (P).

$A\,(x_A, y_A)$ et $B\,(x_B, y_B)$ sont deux points de (P).

On a :

La norme (ou la longueur) du vecteur $\overrightarrow{u}$ est : $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2+y^2}$

La distance entre A et B est : $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

V- Vecteur directeur d'une droite

Définition

Soit (D) une droite passant par A et B

Tout vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ et colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (D).

et on note : $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ ou $D\left(B, \overrightarrow{u}\right)$ ou $D\left(A, \overrightarrow{AB}\right)$.

Exemple

VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

Définition

Soit $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ tel que $A\left(x_A, y_A\right)$ et $\overrightarrow{u}\,(a, b)$.

L'écriture $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ est appelée représentation paramétrique de la droite $D\left(A, \overrightarrow{u}\right)$.

Exemple

6-2/ Équation cartésienne d'une droite

Définition

Le plan (P) est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Toute droite $D\left(A\left(x_A, y_A\right); \overrightarrow{u}\right)$ du plan (P) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $c = x_A y_u - x_u y_A$ et $\overrightarrow{u}\,(-b, a)$ vecteur directeur de la droite (D).

L'écriture $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D) avec $\overrightarrow{u}\,(-b, a)$ vecteur directeur de la droite (D).

Exemple

6-3/ Étude de l'ensemble des points $\{M\,(x, y) / ax + by + c = 0\ ;\ \ (a, b) \neq (0, 0)\}$

Définition

Le plan (P) est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifient $ax + by + c = 0$ est la droite passant par le point $C\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ si $b \neq 0$ (ou $C'\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$ si $a \neq 0$) et qui a $\overrightarrow{u}(-b, a)$ comme vecteur directeur.

Exemple

VII- Droites parallèles dans le plan

Propriété

Le plan (P) est rapporté à un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

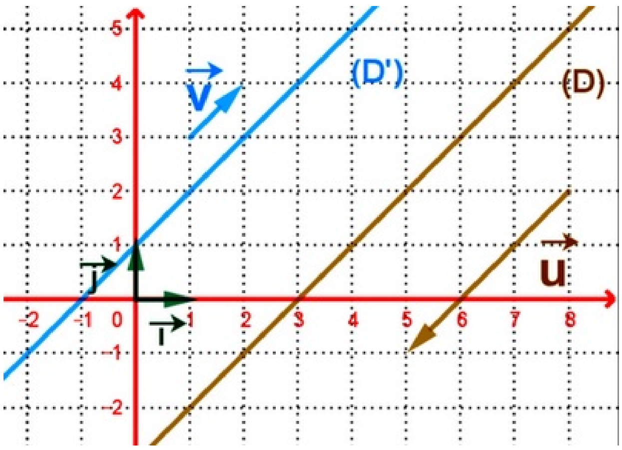
(D) et (D') sont deux droites de (P) tel que $(D)\ :\ ax + by + c = 0$ et
$(D')\ :\ a'x + b'y + c' = 0$.

$(D) \parallel (D')$ équivaut à $ab' - a'b = 0$ ou $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

(D) et (D') sont deux droites de (P) tel que $(D)\ :\ y = mx + p$ et $(D')\ :\ y = m'x + p'$.

$(D) \parallel (D')$ équivaut à $m = m'$.

Exemple



IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

On considère les points suivants : $A(1; 3)$, $B(-1; 2)$ et $C(-2; -1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Calculer les distances suivantes : AB, AC et BC.
3. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{BC}$.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\overrightarrow{AB} + (-3)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
5. Déterminer les coordonnées du point I le milieu du segment $[AB]$.

Soient $\overrightarrow{u}\left(3x + 1; 2\right)$ et $\overrightarrow{v}\left(4; y - 3\right)$ deux vecteurs.

6. Déterminer x et y pour que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.

8-2/ Exercice 2

On considère les points $A(3;2)$ et $B(2;-1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne $(D) : 3x - y + 6 = 0$.

1. Montrer que $(AB) \parallel (D)$.
2. Donner une équation cartésienne de la droite (D') passant par A et dirigées par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(4;-1\right)$.
3. Montrer que (D) et (D') sont sécantes en $E(-1;3)$.

Soit $F(a;0)$ un point du plan.

4. Déterminer le nombre a pour que le quadrilatère $ABFE$ soit un parallélogramme.

8-3/ Exercice 3

Soient $\overrightarrow{u}\left(-1;2\right)$, $\overrightarrow{v}\left(-4;1\right)$ et $w\left(2m-3;2\right)$ / $(m \in \mathbb{R})$ trois vecteurs du plan.

1. Étudier la colinéarité de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Déterminer la valeur du nombre m pour que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ soient colinéaires.
3. Déterminer la valeur du nombre m pour que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ soient colinéaires.

On considère les points suivants : $A\left(1;-8\right)$, $B\left(11;7\right)$, $C\left(5;-1\right)$ et $D\left(7;2\right)$.

4. Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
5. Étudier l'alignement des points E, F , et G dans les cas suivants :

- $E\left(4;-2\right)$, $F\left(5;1\right)$ et $G\left(11;3\right)$.
- $E\left(-2;3\right)$, $F\left(0;-1\right)$ et $G\left(-1;1\right)$.

8-4/ Exercice 4

1. Étudier la position relative de (D) et (D') dans les cas suivants :

$$\begin{array}{c}
1 \;\; (D) : 6x - 2y + 3 = 0 \; et \; (D') : 2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0 \\
2 \;\; (D) : x + 2y - 3 = 0 \; et \; (D') : -x - 2y + 4 = 0 \\
3 \;\; (D) : 5x - 3y + 2 = 0 \; et \; (D') : 2x - 3y - 5 = 0 \\
4 \;\; (D) : -2x - y + 2 = 0 \; et \; (D') : \frac{1}{2}x - y - 7 = 0
\end{array}$$