AlloSchool

Mathématiques : Tronc Commun

Séance 2 (Arithmétique dans IN)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Nombres pairs – Nombres impairs

1-1/ Définition

1-2/ Remarques

II- Critères de divisibilité

III- Nombres premiers

3-1/ Nombres premiers

3-2/ Test de primalité

IV- Décomposition en facteurs premiers

4-1/ Définition

4-2/ Théorème

V- Diviseurs d'un entier naturel – Plus Grand Commun Diviseur de a et b (pgcd (a,b))

5-1/ Définition

5-2/ Théorème

5-3/ Entiers premiers entre eux

VI- Multiples d'un entier naturel – Plus Petit Commun Multiple de a et b (ppcm (a;b))

6-1/ Définition

6-2/ Théorème

6-3/ Remarques

VII- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3
8-4/ Exercice 4
8-5/ Exercice 5
8-6/ Exercice 6

I- Nombres pairs – Nombres impairs

1-1/ Définition

Soit n de $\mathbb{N}$.

Si n est divisible par 2, c'est un nombre pair.

Si non n est impair.

Exemple

1-2/ Remarques

$n \in \mathbb{N}$, n est pair équivaut qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

$n \in \mathbb{N}$, n est impair équivaut qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.

0 (zéro) est un nombre pair (car 2 divise 0).

1 (un) est un nombre impair.

II- Critères de divisibilité

Un nombre naturel est divisible par :

- 2 si le chiffre d'unité est pair.
- 3 si la somme des chiffres est divisible par 3.
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (chiffres d'unité et de dizaine) est divisible par 4.
- 5 si le chiffre d'unité est 0 ou 5.
- 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres (chiffres d' unité et de dizaine et de centaine) est divisible par 8.
- 9 si la somme des chiffres est divisible par 9.

Exemples

III- Nombres premiers

3-1/ Nombres premiers

Un entier naturel $p \geq 2$ est dit premier, si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même (ou encore a juste deux diviseurs positifs).

Un entier naturel différent de 1 qui n'est pas premier est appelé nombre composé.

Exemple

3-2/ Test de primalité

Pour étudier la primalité d'un nombre entier naturel n ; on cherche tous les nombres premiers p qui vérifient $p \leq \sqrt{n}$. Si n est divisible par l'un de ces nombres alors n n'est pas un nombre premier sinon n est premier.

exemple :

.

IV- Décomposition en facteurs premiers

4-1/ Définition

$a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

a s'écrit sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs des nombres premiers qu'on appelle décomposition en facteurs premiers du nombre a.

Exemple

4-2/ Théorème

$a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ sont des nombres entiers non nuls.

Il existe des nombres premiers distincts deux à deux $p_1, p_2, \ldots . p_n$ tel que a se décompose de façon unique sous la forme : $a = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots . \times x^{\alpha_n}$.

V- Diviseurs d'un entier naturel – Plus Grand Commun Diviseur de a et b (pgcd (a,b))

5-1/ Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Le plus grand commun diviseur de a et b est noté par $pgcd(a,b)$ ou $a \wedge b$.

5-2/ Théorème

pgcd(a,b)[Le plus grand commun diviseur de a et b supérieurs ou égaux à 2] est le produit des facteurs premiers communs à a et b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

5-3 Entiers premiers entre eux

Deux entiers a et b sont premiers entre eux (ou étranger) si $a \wedge b = 1$ (pgcd(a,b)=1)

VI- Multiples d'un entier naturel – Plus Petit Commun Multiple de a et b (ppcm (a;b))

6-1/ Définition

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit commun multiple de a et b est noté par $ppcm(a,b)$ ou $a \vee b$.

6-2/ Théorème

ppcm(a,b) [Le plus petit commun multiple de a et b supérieurs ou égaux à 2] est le produit de tous les facteurs premiers communs et non communs de a et b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de a et b.

6-3/ Remarques

pgcd(a,b)=pgcd(b,a)

pgcd(1,a)=1

pgcd(a,a)=a

ppcm(a,b)=ppcm(b,a)

ppcm(1,a)=a

ppcm(a,a)=a

pgcd(a,b)*ppcm(a,b)=a*b

VII- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient a et b deux entiers naturels ($b > 0$).

Il existe un couple unique d'entiers naturels (q, r) tels que $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$

- q est appelé le quotient.
- r le reste.
- a est le dividende et b le diviseur de la division euclidienne de a par b.

IIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

Soient a et b deux entiers naturels pairs.

1. Étudier la parité de $a + b,\ a \times b\ et\ a(a + 1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose $A = 2a - 3$ et $B = 4a + 2$.

2. Étudier la parité de A et B.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

3. Étudier la parité de :

$$a = 2^{n+1} + 27$$
$$b = \ 4n^2 + 8n + 13$$
$$c = n^2 + 5n + 3$$
$$d = n(n + 1)(n^2 + 5n + 3)$$

8-2/ Exercice 2

1. Déterminer a tel que 5a74 soit divisible par 3.
2. Déterminer les diviseurs de 12.

3. Déterminer les entiers naturels x et y tel que $(x+3)(y+2)=12$

8-3/ Exercice 3

Parmi les nombres de la liste ci-dessous déterminer ceux qui sont des nombres premiers :

101 - 239 – 387 – 700107

8-4/ Exercice 4

On pose a=156 et b=495

1- Décomposer a et b.

2- Déterminer le pgcd(a;b) et ppcm(a;b).

3- vérifier que $pgcd(a;b) \times ppcm(a;b) = a \times b$

8-5/ Exercice 5

On considère le nombre $a = 2^3 \times 3^2 \times 7$

1. Vérifier que a est divisible par 24.
2. Déterminer le plut petit nombre entier naturel k tel que ka est un carré parfait.

8-6/ Exercice 6

Soient n et k deux entiers naturels.

1. Vérifier que si $n = 5k+1$ et $n = 5k+4$ alors $n^2 - 1$ est divisible par 5.
2. Vérifier que si $n = 5k+2$ et $n = 5k+3$ alors $n^2 + 1$ est divisible par 5.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n\left(n^4 - 1\right)$ est divisible par 5.