



Mathématiques : Tronc Commun

Séance 2 (Arithmétique dans  $\mathbb{N}$ )

Professeur : Mr **ETTOUHAMY Abdelhak**

### Sommaire

I- Nombres pairs – Nombres impairs

1-1/ Définition

1-2/ Remarques

II- Critères de divisibilité

III- Nombres premiers

3-1/ Nombres premiers

3-2/ Test de primalité

IV- Décomposition en facteurs premiers

4-1/ Définition

4-2/ Théorème

V- Diviseurs d'un entier naturel – Plus Grand Commun Diviseur de a et b ( $\text{pgcd}(a,b)$ )

5-1/ Définition

5-2/ Théorème

5-3/ Entiers premiers entre eux

VI- Multiples d'un entier naturel – Plus Petit Commun Multiple de a et b ( $\text{ppcm}(a;b)$ )

6-1/ Définition

6-2/ Théorème

6-3/ Remarques

VII- Division euclidienne dans  $\mathbb{N}$

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

8-5/ Exercice 5

8-6/ Exercice 6

---

## I- Nombres pairs – Nombres impairs

### 1-1/ Définition

Soit  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

Si  $n$  est divisible par 2, c'est un nombre pair.

Si non  $n$  est impair.

### Exemple

### 1-2/ Remarques

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  est pair équivaut qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2k$ .

$n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  est impair équivaut qu'il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2k + 1$ .

0 (zéro) est un nombre pair (car 2 divise 0).

1 (un) est un nombre impair.

## II- Critères de divisibilité

Un nombre naturel est divisible par :

- 2 si le chiffre d'unité est pair.
- 3 si la somme des chiffres est divisible par 3.
- 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres (chiffres d'unité et de dizaine) est divisible par 4.
- 5 si le chiffre d'unité est 0 ou 5.
- 8 si le nombre formé par ses trois derniers chiffres (chiffres d'unité et de dizaine et de centaine) est divisible par 8.
- 9 si la somme des chiffres est divisible par 9.

### Exemples

## III- Nombres premiers

### 3-1/ Nombres premiers

Un entier naturel  $p \geq 2$  est dit premier, si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et lui même (ou encore a juste deux diviseurs positifs).

Un entier naturel différent de 1 qui n'est pas premier est appelé nombre composé.

### Exemple

### 3-2/ Test de primalité

Pour étudier la primalité d'un nombre entier naturel  $n$  ; on cherche tous les nombres premiers  $p$  qui vérifient  $p \leq \sqrt{n}$ . Si  $n$  est divisible par l'un de ces nombres alors  $n$  n'est pas un nombre premier sinon  $n$  est premier.

**exemple :**

.

## IV- Décomposition en facteurs premiers

### 4-1/ Définition

$$a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$a$  s'écrit sous la forme d'un produit de plusieurs facteurs des nombres premiers qu'on appelle décomposition en facteurs premiers du nombre  $a$ .

**Exemple**

### 4-2/ Théorème

$$a \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des nombres entiers non nuls.

Il existe des nombres premiers distincts deux à deux  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tel que  $a$  se décompose de façon unique sous la forme :  $a = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$ .

## V- Diviseurs d'un entier naturel – Plus Grand Commun Diviseur de $a$ et $b$ (pgcd ( $a, b$ ))

### 5-1/ Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$  est noté par  $\text{pgcd}(a, b)$  ou  $a \wedge b$ .

### 5-2/ Théorème

$\text{pgcd}(a, b)$  [ Le plus grand commun diviseur de  $a$  et  $b$  supérieurs ou égaux à 2 ] est le produit des facteurs premiers communs à  $a$  et  $b$  munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de  $a$  et  $b$ .

### 5-3 Entiers premiers entre eux

Deux entiers  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux (ou étrangers) si  $a \wedge b = 1$  ( $\text{pgcd}(a, b) = 1$ )

## VI- Multiples d'un entier naturel – Plus Petit Commun Multiple de $a$ et $b$ (ppcm ( $a; b$ ))

### 6-1/ Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels non nuls.

Le plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$  est noté par  $\text{ppcm}(a, b)$  ou  $a \vee b$ .

## 6-2/ Théorème

$\text{ppcm}(a,b)$  [ Le plus petit commun multiple de  $a$  et  $b$  supérieurs ou égaux à 2 ] est le produit de tous les facteurs premiers communs et non communs de  $a$  et  $b$  munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition en facteurs premiers de  $a$  et  $b$ .

## 6-3/ Remarques

$$\text{pgcd}(a,b)=\text{pgcd}(b,a)$$

$$\text{pgcd}(1,a)=1$$

$$\text{pgcd}(a,a)=a$$

$$\text{ppcm}(a,b)=\text{ppcm}(b,a)$$

$$\text{ppcm}(1,a)=a$$

$$\text{ppcm}(a,a)=a$$

$$\text{pgcd}(a,b)*\text{ppcm}(a,b)=a*b$$

## VII- Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels ( $b > 0$ ).

Il existe un couple unique d'entiers naturels  $(q, r)$  tels que 
$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

- $q$  est appelé le quotient.
- $r$  le reste.
- $a$  est le dividende et  $b$  le diviseur de la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .

## IIIX- Exercices

### 8-1/ Exercice 1

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels pairs.

1. Étudier la parité de  $a + b$ ,  $a \times b$  et  $a(a + 1)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

On pose  $A = 2a - 3$  et  $B = 4a + 2$ .

2. Étudier la parité de  $A$  et  $B$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Étudier la parité de :

$$a = 2^{n+1} + 27$$

$$b = 4n^2 + 8n + 13$$

$$c = n^2 + 5n + 3$$

$$d = n(n + 1)(n^2 + 5n + 3)$$

### 8-2/ Exercice 2

1. Déterminer  $a$  tel que  $5a74$  soit divisible par 3.
2. Déterminer les diviseurs de 12.

3. Déterminer les entiers naturels  $x$  et  $y$  tel que  $(x + 3)(y + 2) = 12$

### 8-3/ Exercice 3

Parmi les nombres de la liste ci-dessous déterminer ceux qui sont des nombres premiers :

101 - 239 - 387 - 700107

### 8-4/ Exercice 4

On pose  $a=156$  et  $b=495$

1- Décomposer  $a$  et  $b$ .

2- Déterminer le  $\text{pgcd}(a;b)$  et  $\text{ppcm}(a;b)$ .

3- vérifier que  $\text{pgcd}(a;b) \times \text{ppcm}(a;b) = a \times b$

### 8-5/ Exercice 5

On considère le nombre  $a = 2^3 \times 3^2 \times 7$

1. Vérifier que  $a$  est divisible par 24.

2. Déterminer le plus petit nombre entier naturel  $k$  tel que  $ka$  est un carré parfait.

### 8-6/ Exercice 6

Soient  $n$  et  $k$  deux entiers naturels.

1. Vérifier que si  $n = 5k + 1$  et  $n = 5k + 4$  alors  $n^2 - 1$  est divisible par 5.

2. Vérifier que si  $n = 5k + 2$  et  $n = 5k + 3$  alors  $n^2 + 1$  est divisible par 5.

3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $n(n^4 - 1)$  est divisible par 5.