Mathématiques : Tronc Commun

Séance 8 (Équations, inéquations et systèmes)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappels

1-1/ Équations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 1er degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b.

Exemple

1-2/ Inéquations du 1er degré à une inconnue

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute inéquation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax + b \geq 0$ ou $ax + b \leq 0$ $ax + b > 0$ ou $ax + b < 0$ est appelée inéquation du 1er degré d'un seul inconnu x.

Signe du binôme du 1er degré $ax + b$

Cas $a > 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	ax+b	−	0	+

Cas $a < 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	ax+b	−	0	+

Exemple

II- Équations du second degré à une inconnue

2-1/ Définition

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$; $(a \neq 0)$.

Toute équation dont l'écriture se ramène sous la forme suivante $ax^2 + bx + c = 0$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée équation du 2ème degré d'un seul inconnu x de et ses coefficients réels sont a et b et c.

2-2/ Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

L' écriture $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$, noté par Δ, et on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$.

La forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ s'écrit :

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

d'où :

$$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

2-3/ Détermination des solutions de l'équation ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$, et son discriminant $\Delta = b^2-4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes (ou deux racines distinctes) dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution (solution double) dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$: $S = \emptyset$.

2-4/ La somme et le produit des racines de l'équation ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Si l'équation admet deux racines distinctes x_1 et x_2, alors on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Factorisation du trinôme de second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Δ est le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}/ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution $x_1 = -\frac{b}{a}$, on a $ax^2+bx+c = a(x-x_1)^2$

- Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c sous forme de produit de deux polynômes de 1er degré (deux monômes).

Exemple

2-5/ Factorisation et signe du trinôme de second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Signe du trinôme de second degré ax^2+bx+c $(a \neq 0)$

Δ est le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R}/ax^2+bx+c$.

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Sgn. de a	0	Sgn. de $-a$	0	Sgn; de a	

- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

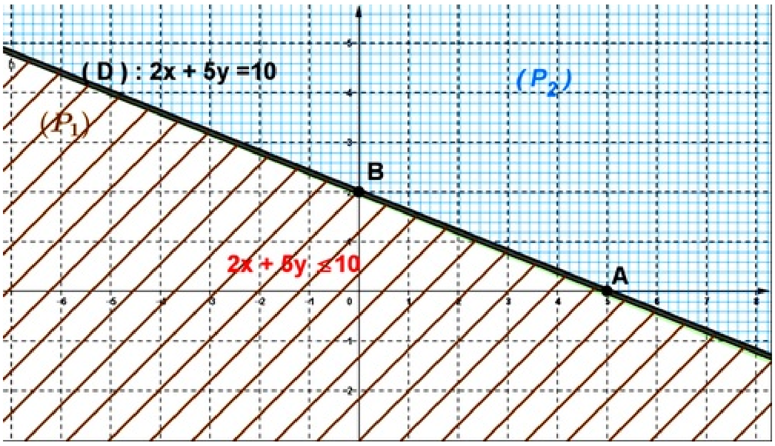
- Si $\Delta < 0$: le trinôme n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, on ne peut pas factoriser ax^2+bx+c , et son signe est celui de a pour tout x de $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

Exemple

III- Équations et inéquations du 1er degré à deux inconnues (Méthode graphique)

Méthode



IV- Déterminants d'un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues

4-1/ Définition

On considère le système suivant : $(S)\ :\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Le nombre $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ est appelé le déterminant du système (S).

Le nombre $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x.

Le nombre $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$ est appelé le déterminant pour déterminer y.

Exemple

4-2/ Propriétés

1. Cas 1 : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b\neq 0$

Le système est appelé système de Cramer, le système admet une solution unique : $S=\left\{\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)\right\}$

2. Cas 2 : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b=0$

- Si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$, le système n'a pas de solution, d'où $S=\emptyset$.

- Si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$, le système se ramène a une seule équation, on prend une par exemple $(S)\ :\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c$, le système a une infinité de solutions, d'où (
$S = \left\{ (x,y)/y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, x \in \mathbb{R} \right\}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1\ \ \frac{2x+3}{x-2} = 0$$
$$2\ \ \frac{x-3}{9x+6} = 1$$
$$3\ \ \frac{4}{x-3} - \frac{5}{x+1} = 0$$
$$4\ \ \frac{2}{x+3} = \frac{x-3}{2}$$
$$5\ \ \frac{x+1}{5x-7} = \frac{5x+7}{x-1}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1\ \ \left(1-\sqrt{2}\right)x - 5 \leq 0$$
$$2\ \ 3x - 5 < 7 - \sqrt{2}x$$
$$3\ \ \frac{7x-2}{1-\sqrt{3}} \leq \frac{7x+2}{1+\sqrt{3}}$$
$$4\ \ |x-5| < \frac{1}{2}$$
$$5\ \ |x+2| - 5 \leq 4$$
$$6\ \ |3x-2| > 3$$

5-2/ Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1\ \ x^2 + x + 1 = 0$$
$$2\ \ 3x^2 + 3\sqrt{2}x + 2 = 0$$
$$3\ \ x^2 - x - 12 = 0$$
$$4\ \ 3x^2 + 5x + 1 = 0$$
$$5\ \ 4x^2 - 3x + 1 = 0$$
$$6\ \ x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$1\ \ x^2 - 5x + 6 \leq 0$$
$$2\ \ -x^2 + x + 6 > 0$$
$$3\ \ \left(x^2 - 5x + 6\right)\left(-x^2 + x + 6\right) \leq 0$$
$$4\ \ \frac{x^2-6x+5}{x^2-4} \geq 0$$
$$5\ \ \left(x^2 + 3x + 2\right)\left(-x^2 + 5x - 6\right) \leq 0$$

5-3/ Exercice 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$1 \quad (S_1) : \begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -10x + 4y = 3 \end{cases}$$

$$2 \quad (S_2) : \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x - 2y = 11 \end{cases}$$

3. Déduire les solutions des systèmes suivants :

$$1 \quad (S_1) : \begin{cases} -\sqrt{x} + \frac{3}{y} = 4 \\ \sqrt{x} - \frac{2}{y} = 11 \end{cases}$$

$$2 \quad (S_2) : \begin{cases} -\left|x+1\right| + 3y^2 = 4 \\ \left|x+1\right| - 2y^2 = 11 \end{cases}$$

5-4/ Exercice 4

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2x^2 - 2x - 4 = 0$
2. Déduire les solutions de l'équation suivante : $2x^4 - 2x^2 - 4 = 0$

On considère l'équation suivante : $(E)\ :\ x^2 + x - 6 = 0$

3. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distincts α et β sans les calculer.
4. Calculer $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$, $\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta$
5. Factoriser, si possible, les polynômes suivants :

$$P(x) = x^2 - x - 6$$
$$Q(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$$
$$S(x) = x^2 + 3x + 5$$