Mathématiques : Tronc Commun

Séance 7 (Les polynômes)

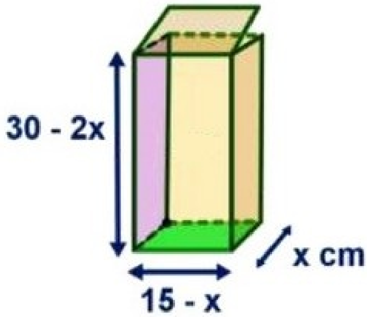
Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Notion de polynôme

1-1/ Approche sur les polynômes

Une usine de carton décide de construire une boite de carton de la forme d'un parallélépipède droit pour une usine de jus d'orange dont les dimensions sont :



Soit $V(x)$ le volume de la boite

1. Vérifier que $V\left(x\right) = 2x^3 - 60x^2 + 450x$.
2. Quel est le volume (exprimée en litre) de la boite si on donne à x les valeurs suivants : $x = 5$ et $x = 10$.

1-2/ Vocabulaire

L'expression $2x^3 - 60x^2 + 450x$ est appelée polynôme de degré 3.

On note les polynômes par $P(x)$ ou $Q(x)$ ou $R(x)$ ....

Pour le degré on note $d^\circ\ (V) = 3$.

Les nombres 2 et -60 et 450 sont appelés les coefficients du polynômes.

1-3/ Définitions

x variable de $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

-L'expression $P\left(x\right) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ est appelée polynôme

- si $a_n \neq 0$ alors n est le degré de P

- Chaque terme de cette somme est appelé monôme (exemple a_2x^2 est un monôme de degré 2).

- Les réels a_0, a_1, a_2,......., a_{n-1} et a_n sont appelés les coefficients du polynômes

- Si $P(x) = a_0$ et avec $a_0 \neq 0$ on a $deg\left(P\right) = 0$.

- Si $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$ alors $P(x) = 0$, d'où $P(x)$ n'a pas de degré, le polynôme est appelé le polynôme nul.

II- Égalité de deux polynômes

Propriété

$P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes égaux si et seulement si $deg(P) = deg(Q)$ et les coefficients des monômes de même degré sont égaux.

Exemple

III- Somme et produit de deux polynômes

Propriété

La somme de deux polynôme $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme noté par $P(x) + Q\left(x\right)$, tel que $deg\left(P + Q\right) \leq sup\left[deg\left(P\right); deg\left(Q\right)\right]$.

Le produit de deux polynôme $P(x)$ et $Q(x)$ est un polynôme noté par $P(x) \times Q(x)$, tel que $deg(P \times Q) = deg(P) + deg(Q)$.

Exemple

IV- Racine d'un polynôme

Propriété

On dit qu'un réel α est un racine (ou zéro) d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Exemple

V- Division d'un polynôme par le binôme $x - a$ $(a \in \mathbb{R})$

5-1/ Définition et propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n $(n \in \mathbb{N}^*)$, et a un réel.

Le polynôme $P(x)$ s'écrit de la forme $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$ avec $deg(Q) = n - 1$.

Le polynôme $Q(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$.

Le réel $P(a)$ est appelé le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x - a$.

5-2/ Cas particuliers

Si $P(a) = 0$ (a est un zéro ou racine du polynôme), on obtient $P(x) = (x - a)Q(x)$.

dans ce cas on dit :

- Le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - a$.
- Le polynôme $P(x)$ est factorisé par $x - a$.

5-3/ Méthodes pour déterminer le quotient $Q(x)$ et le reste $P(a)$

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4$ et $a = 2$

Méthode 1

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4$
$P(x) = (x - 2)Q(x) + P(2)$
$P(x) = (x - 2)\left(ax^2 + bx + c\right) + 32$
$P(x) = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c + 32$

Donc on a :

$$\begin{cases} 6 = a \\ -5 = b - 2a \\ 0 = c - 2b \\ 4 = -2c + 32 \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 6\ ;\ b = 7\ ;\ c = 14$

Conclusion :

$$P(x) = (x - 2)\left(6x^2 + 7x + 14\right) + 32$$

$P(x) = 6x^3 - 5x^2 + 4$ et $a = 2$

Méthode 2 : La division euclidienne

$$
\begin{array}{rrr|l}
 & 6x^3-5x^2+0x+4 & & x-2 \\
\cline{4-4}
 & 6x^3-12x^2 & & 6x^2+7x+14 \\
- & \overline{} & & \\
 & 7x^2+0x+4 & & \\
 & 7x^2-14x & & \\
- & \overline{} & & \\
 & 14x+4 & & \\
 & 14x-28 & & \\
- & \overline{} & & \\
 & 32 & &
\end{array}
$$

$P\left(x\right)=6x^3-5x^2+4$ et $a=2$

Méthode 3 : Schéma de Horner

	x^3	x^2	x	x^0
Coefficient de $P(x)\rightarrow$	6	-5	0	4
		$\times 2$ 12 +	$\times 2$ 14 +	$\times 2$ 28 +
Coefficient de $Q(x)\rightarrow$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{14}$	32 Le reste
$Q(x)$	$6x^2$	$7x^2$	14	
$P(x)$	$P(x)=(6x^2+7x^2+14)(x-2)+32$			

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

Soient $P\left(x\right)$ et $Q\left(x\right)$ deux polynômes tels que $P\left(x\right)=(a-1)x^2+2x+c$ et $Q\left(x\right)=3x^2+(b-1)x-3$

1. Déterminer a, b et c pour que $P(x)=Q(x)$

On a $R\left(x\right)=2x^3-5x^2-4x+3$ et $S\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x-3\right)\left(ax+b\right)$

2. Déterminer a et b pour que $R\left(x\right)=S\left(x\right)$
3. Déterminer a et b pour que $P=Q$

6-2/ Exercice 2

Déterminer la division de $P\left(x\right)$ sur $x-\alpha$ dans les cas suivants :

$$1\ \ P\left(x\right)=x^3-3x^2+4x-4\quad et\quad \alpha=2$$
$$2\ \ P\left(x\right)=x^4-3x^2+x-2\quad et\quad \alpha=-2$$
$$3\ \ P\left(x\right)=x^3+3x^2+4x+12\quad et\quad \alpha=-3$$

6-3/ Exercice 3

Soit $P\left(x\right)=2x^3+5x^2-x-6$

1. Montrer que (-2) est une racine de $P\left(x\right)$.
2. Déterminer le polynôme $Q\left(x\right)$ tel que $P\left(x\right)=(x+2)Q\left(x\right)$.
3. Montrer que $Q\left(x\right)$ est divisible par $x-1$.
4. Factoriser $Q\left(x\right)$, puis déduire la factorisation en produit des binômes.
5. Résoudre l'équation $P\left(x\right)=0$.

6-4/ Exercice 4

Soit $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2$

1. Montrer que 0 n'est pas une racine de $P(x)$.
2. Montrer que si α est une racine de $P(x)$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi est une racine de $P(x)$.
3. Montrer que 2 est une racine de $P(x)$.
4. En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 2$, déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$.
5. Déduire que $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
6. Déterminer a, b et c tels que $Q(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(ax^2 + bx + c\right)$.
7. Factoriser $P(x)$ en produit de binômes.
8. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.