



## Mathématiques : Tronc Commun

Séance 6 (La droite dans le plan)

Professeur : Mr **ETTOUHAMY Abdelhak**

### Sommaire

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

1-2/ Coordonnées d'un point du plan

1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs – Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

II- Déterminant de deux vecteurs

III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

V- Vecteur directeur d'une droite

VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

6-2/ Équation cartésienne d'une droite

6-3/ Étude de l'ensemble des points  $\{M(x, y) / ax + by + c = 0\}$

VII- Droites parallèles dans le plan

IIIX- Exercices

8-1/ Exercice 1

8-2/ Exercice 2

8-3/ Exercice 3

8-4/ Exercice 4

---

I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

## 1-1/ Base d'un plan – Repère d'un plan

### Définition

Soient  $O$ ,  $I$  et  $J$  trois points non alignés du plan ( $P$ ),

on pose  $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$  et  $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$

- le triplet  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère du plan ( $P$ )

- le point  $O$  est appelé l'origine du repère.

- Le couple  $(\vec{i}, \vec{j})$  est appelé une base du plan ( $P$ ).

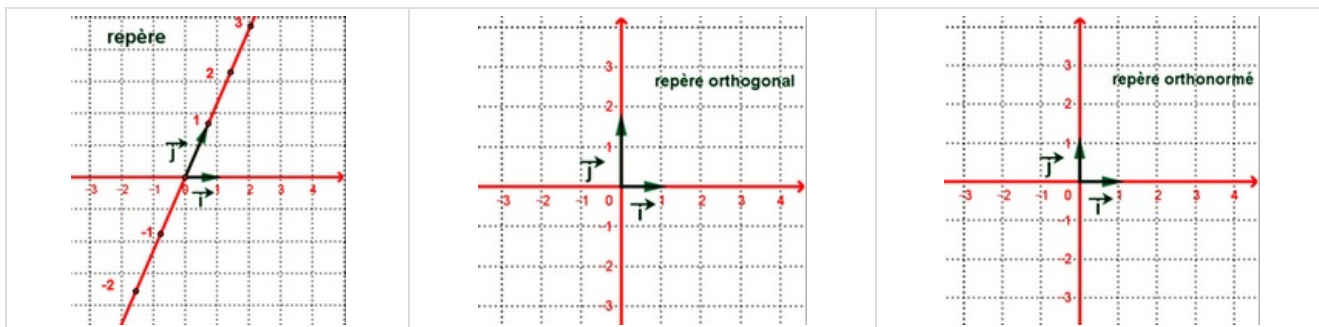
- la droite  $(OI)$  s'appelle l'axe des abscisses.

- la droite  $(OJ)$  s'appelle l'axe des ordonnées.

- Si  $(OI) \perp (OJ)$ , alors le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthogonal

- Si  $(OI) \perp (OJ)$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ , alors le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé .

### Exemples



## 1-2/ Coordonnées d'un point du plan

Le plan ( $P$ ) est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Pour tout point  $M$  du plan ( $P$ ), il existe un et un seul couple  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j}$ .

Le couple  $(x, y)$  est appelé couple des coordonnées du point  $M$ .

Le nombre  $x$  est appelé abscisse du point  $M$ .

Le nombre  $y$  est appelé ordonnée du point  $M$ .

Ot on écrit  $M(x, y)$  ou  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  du plan ( $P$ ), il existe un seul couple  $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j}$

Le couple  $(x, y)$  est appelé couple des coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ .

Le nombre  $x$  est appelé abscisse du vecteur  $\vec{u}$ .

Le nombre  $y$  est appelé ordonnée du vecteur  $\vec{u}$ .

Où on écrit  $\vec{u}(x, y)$  ou  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

## - I- Base d'un plan – Repère d'un plan – Coordonnées d'un point du plan

### 1-3/ Coordonnées de la somme de deux vecteurs – Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Le plan  $(P)$  est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs de  $(P)$ .

$A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  et  $I(x_I, y_I)$  sont des points de  $(P)$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$

On a :

- Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ . on note  $\vec{u} + \vec{v}(x + x', y + y')$ .

- Le vecteur  $\alpha \vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ . on note  $\alpha \vec{u}(\alpha x, \alpha y)$ .

- Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ , on note  $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$

-  $I(x_I, y_I)$  est le milieu du segment  $[AB]$ , on a  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$  et  $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$ .

### Exemple

## II- Déterminant de deux vecteurs

Le plan  $(P)$  est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs de  $(P)$ .

Le nombre  $xy' - x'y$  est appelé le déterminant des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On note :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$$

## III- Condition de colinéarité de deux vecteurs

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs de  $(P)$  rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires équivaut à  $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  ( $xy' - yx' = 0$ )

## IV- Norme d'un vecteur - Distance entre deux points

Le plan  $(P)$  est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est un vecteur de  $(P)$ .

$A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  sont deux points de  $(P)$ .

On a :

La norme (ou la longueur) du vecteur  $\vec{u}$  est :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

La distance entre A et B est :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

## V- Vecteur directeur d'une droite

### Définition

Soit  $(D)$  une droite passant par  $A$  et  $B$

Tout vecteur non nul  $\vec{u}$  et colinéaire avec le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est appelé vecteur directeur de la droite  $(D)$ .

et on note :  $D(A, \vec{u})$  ou  $D(B, \vec{u})$  ou  $D(A, \overrightarrow{AB})$ .

### Exemple

## VI- Représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite

### 6-1/ Représentation paramétrique d'une droite

#### Définition

Soit  $D(A, \vec{u})$  une droite du plan  $(P)$  qui est rapporté au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $A(x_A, y_A)$  et  $\vec{u}(a, b)$ .

L'écriture  $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases}$  ;  $t \in \mathbb{R}$  est appelée représentation paramétrique de la droite  $D(A, \vec{u})$ .

#### Exemple

### 6-2/ Équation cartésienne d'une droite

#### Définition

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Toute droite  $D(A(x_A, y_A); \vec{u})$  du plan  $(P)$  a une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $c = x_A y_u - x_u y_A$  et  $\vec{u}(-b, a)$  vecteur directeur de la droite  $(D)$ .

L'écriture  $ax + by + c = 0$  est appelée équation cartésienne de la droite  $(D)$  avec  $\vec{u}(-b, a)$  vecteur directeur de la droite  $(D)$ .

#### Exemple

### 6-3/ Étude de l'ensemble des points

$\{M(x, y) / ax + by + c = 0 ; (a, b) \neq (0, 0)\}$

#### Définition

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$a, b, c \in \mathbb{R}$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ .

l'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $(P)$  qui vérifient  $ax + by + c = 0$  est la droite passant par le point  $C\left(0, -\frac{c}{b}\right)$  si  $b \neq 0$  (ou  $C'\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$  si  $a \neq 0$ ) et qui a  $\vec{u}(-b, a)$  comme vecteur directeur.

### Exemple

## VII- Droites parallèles dans le plan

### Propriété

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$(D)$  et  $(D')$  sont deux droites de  $(P)$  tel que  $(D) : ax + by + c = 0$  et

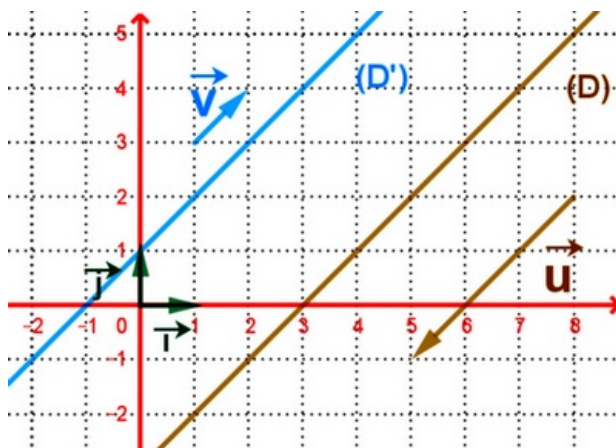
$(D') : a'x + b'y + c' = 0$ .

$(D) \parallel (D')$  équivaut à  $ab' - a'b = 0$  ou  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ .

$(D)$  et  $(D')$  sont deux droites de  $(P)$  tel que  $(D) : y = mx + p$  et  $(D') : y = m'x + p'$ .

$(D) \parallel (D')$  équivaut à  $m = m'$ .

### Exemple



## III- Exercices

### 8-1/ Exercice 1

On considère les points suivants :  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; 2)$  et  $C(-2; -1)$ .

- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  et  $\vec{BC}$ .
- Calculer les distances suivantes :  $AB$ ,  $AC$  et  $BC$ .
- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes :  $2\vec{AB}$  et  $-3\vec{BC}$ .
- Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes  $2\vec{AB} + (-3)\vec{BC}$  et  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .
- Déterminer les coordonnées du point  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

Soient  $\vec{u}(3x + 1; 2)$  et  $\vec{v}(4; y - 3)$  deux vecteurs.

- Déterminer  $x$  et  $y$  pour que  $\vec{u} = \vec{v}$ .

### 8-2/ Exercice 2

On considère les points  $A(3; 2)$  et  $B(2; -1)$  et la droite  $(D)$  d'équation cartésienne  $(D) : 3x - y + 6 = 0$ .

1. Montrer que  $(AB) \parallel (D)$ .
  2. Donner une équation cartésienne de la droite  $(D')$  passant par  $A$  et dirigées par le vecteur  $\vec{u}(4; -1)$ .
  3. Montrer que  $(D)$  et  $(D')$  sont sécantes en  $E(-1; 3)$ .
- Soit  $F(a; 0)$  un point du plan.
4. Déterminer le nombre  $a$  pour que le quadrilatère  $ABFE$  soit un parallélogramme.

### 8-3/ Exercice 3

Soient  $\vec{u}(-1; 2)$ ,  $\vec{v}(-4; 1)$  et  $w(2m - 3; 2) / (m \in \mathbb{R})$  trois vecteurs du plan.

1. Étudier la colinéarité de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
2. Déterminer la valeur du nombre  $m$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{w}$  soient colinéaires.
3. Déterminer la valeur du nombre  $m$  pour que  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  soient colinéaires.

On considère les points suivants :  $A(1; -8)$ ,  $B(11; 7)$ ,  $C(5; -1)$  et  $D(7; 2)$ .

4. Montrer que  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.
5. Étudier l'alignement des points  $E$ ,  $F$ , et  $G$  dans les cas suivants :
  - $E(4; -2)$ ,  $F(5; 1)$  et  $G(11; 3)$ .
  - $E(-2; 3)$ ,  $F(0; -1)$  et  $G(-1; 1)$ .

### 8-4/ Exercice 4

1. Étudier la position relative de  $(D)$  et  $(D')$  dans les cas suivants :
  - 1  $(D) : 6x - 2y + 3 = 0$  et  $(D') : 2x - \frac{1}{3}y - 1 = 0$
  - 2  $(D) : x + 2y - 3 = 0$  et  $(D') : -x - 2y + 4 = 0$
  - 3  $(D) : 5x - 3y + 2 = 0$  et  $(D') : 2x - 3y - 5 = 0$
  - 4  $(D) : -2x - y + 2 = 0$  et  $(D') : \frac{1}{2}x - y - 7 = 0$