

Sommaire

I- Ordre et opérations dans l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$

1-1/ Ordre dans  $\mathbb{R}$

1-2/ Propriétés de l'ordre et les opérations

II- Les intervalles – L'encadrement

2-1/ Les intervalles

2-2/ L'encadrement

III- Intersections et réunions d'intervalles

3-1/ Intersections d'intervalles

3-2/ Réunions d'intervalles

IV- Valeur absolue d'un nombre réel

4-1/ Définition

4-2/ Propriétés de la valeur absolue

4-3/ Distance et valeur absolue

V- Approximation – Approximation décimale

5-1/ Approximation

5-2/ Approximation décimale

VI- Exercices

6-1/ Exercice 1

6-2/ Exercice 2

6-3/ Exercice 3

6-4/ Exercice 4

---

I- Ordre et opérations dans l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$

1-1/ Ordre dans  $\mathbb{R}$

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$

- Si  $a \leq b$  alors  $(a - b) \leq 0$  , on dit que  $(b - a) \in \mathbb{R}^-$
- Si  $a < b$  alors  $(a - b) < 0$  , on dit que  $(b - a) \in \mathbb{R}^{-*}$
- Si  $a \geq b$  alors  $(a - b) \geq 0$  , on dit que  $(b - a) \in \mathbb{R}^+$
- Si  $a > b$  alors  $(a - b) > 0$  , on dit que  $(b - a) \in \mathbb{R}^{+*}$
- 

## Exemple

### 1-2/ Propriétés de l'ordre et les opérations

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Si  $a \leq b$  et  $b \leq c$ , alors  $a \leq c$  (l'ordre est transitive).

Si  $a \leq b$ , alors  $a + c \leq b + c$  et  $a - c \leq b - c$ .

Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , alors  $a + c \leq b + d$  (l'ordre est compatible avec l'addition).

Si  $a \leq b$  et  $c > 0$ , alors  $a \times c \leq b \times c$  et  $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ .

Si  $a \leq b$  et  $c < 0$ , alors  $a \times c \geq b \times c$  et  $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ .

Si  $a$  et  $b$  sont non nuls et de même signe, on a :  $a \leq b$  équivaut à  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ .

Si  $a$  et  $b$  sont positifs, on a  $a \leq b$  équivaut  $a^2 \leq b^2$ .

Si  $a$  et  $b$  sont positifs, on a  $a \leq b$  équivaut  $a^n \leq b^n$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ )

Si  $a$  et  $b$  sont positifs, on a  $a \leq b$  équivaut  $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ .

## II- Les intervalles – L'encadrement

### 2-1/ Les intervalles

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tel que  $a < b$ .

Pour les intervalles suivants  $[a, b]$  et  $]a, b[$  et  $[a, b[$  et  $]a, b]$ , on a :

$a$  et  $b$  sont appelés les extrémités des intervalles.

Le nombre positif  $b - a$  est appelé la distance entre  $a$  et  $b$ .

Le nombre positif  $b - a$  est appelé la longueur (ou capacité) des intervalles précédents.

Le nombre  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  représente le centre des intervalles précédents .

Le nombre positif  $r = \frac{b-a}{2}$  représente le rayon des intervalles précédents.

Les deux symboles  $-\infty$  et  $+\infty$  et ne sont pas des nombres.

$$\mathbb{R}^{+*} = ]0; +\infty[$$

$$\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

$$\mathbb{R}^{-*} = ]-\infty; 0[$$

$$\mathbb{R}^- = ]-\infty; 0]$$

$$]a; a[ = \emptyset$$

$\emptyset$  est un intervalle appelé ensemble vide.

### 2-2/ L'encadrement

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

Réaliser un encadrement du nombre  $x$ , c'est trouver deux nombres réels  $a$  et  $b$  tel que  $a \leq x \leq b$  ou bien  $a \leq x < b$  ou bien  $a < x \leq b$  ou bien  $a < x < b$ .

Le nombre réel positif  $b - a$  s'appelle l'amplitude de cet encadrement.

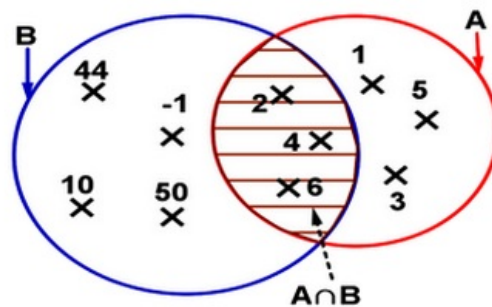
### III- Intersections et réunions d'intervalles

#### 3-1/ Intersections d'intervalles

$A$  et  $B$  sont deux ensembles.

Tous les éléments communs de  $A$  et de  $B$  constituent l'ensembles noté  $A \cap B$  appelé intersection de  $A$  et  $B$ .

$$\text{Donc : } A \cap B = \{x/x \in A \text{ et } x \in B\}$$

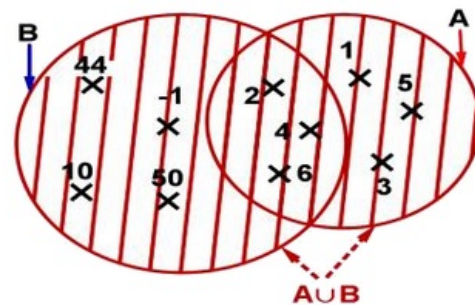


#### 3-2/ Réunions d'intervalles

$A$  et  $B$  sont deux ensembles.

Tous les éléments qui appartiennent soit à  $A$  ou soit à  $B$  constituent l'ensembles noté  $A \cup B$  appelé union de  $A$  et  $B$ .

$$\text{Donc : } A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



### IV- Valeur absolue d'un nombre réel

#### 4-1/ Définition

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

$(D)$  est une droite graduée d'origine  $O$  et d'unité de mesure  $OI = 1$ .

Le point  $M$  est un point de  $(D)$  dont l'abscisse est  $x$ .

La valeur absolue du nombre  $x$  est la distance  $OM$ , on note  $OM = |x|$ .



#### Remarques

$$\begin{aligned}
 |-x| &\geq 0 \\
 x \geq 0 &\Rightarrow |x| = x \\
 x \leq 0 &\Rightarrow |x| = -x \\
 |0| &= 0 \\
 |-x| &= |x|
 \end{aligned}$$

## 4-2/ Propriétés de la valeur absolue

Pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

Pour tous  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $|a \times b| = |a| \times |b|$ .

Pour tout  $a$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $|a^n| = |a|^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) et  $|a^{-n}| = |a|^{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Pour tous  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

Pour tout  $b$  de  $\mathbb{R}^*$ , on a  $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{|b|}$ .

Pour tous  $a$  de  $\mathbb{R}$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ .

Pour tous  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ , on a  $|a| = |b|$  équivaut à  $a = b$  ou  $a = -b$ .

### Exemple

## 4-3/ Distance et valeur absolue

### Définition

Soit une droite graduée d'origine  $O$ .

Notons  $A$  d'abscisse  $a$  et  $B$  d'abscisse  $b$ .

Le nombre positif  $|b - a|$  est appelé la distance entre les points entre  $A$  et  $B$ .

On a  $AB = |b - a|$ .



### Propriétés

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{R}^+$

$|x| \leq r$  équivaut à  $-r \leq x \leq r$ .

$|x| < r$  équivaut à  $-r < x < r$ .

$|x| \geq r$  équivaut à  $x \leq -r$  ou  $x \geq r$ .

$|x| > r$  équivaut à  $x < -r$  ou  $x > r$ .

$|x - x_0| \leq r$  équivaut à  $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$ .

On a  $[a, b] = [x_0 - r, x_0 + r]$  avec  $x_0 = \frac{a+b}{2}$  centre de l'intervalle et  $r = \frac{b-a}{2}$  son rayon.

## V- Approximation – Approximation décimale

### 5-1/ Approximation

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $r \in \mathbb{R}^{+*}$ .

- On dit que  $a$  est une valeur approchée (ou approximation) de  $x$  à  $r$  près (ou à la précision  $r$ ) lorsque  $x$  vérifie  $|x - a| \leq r$ .
- On dit que  $a$  est une valeur approchée par défaut de  $x$  à  $b - a$  près lorsque  $x$  vérifie  $a \leq x \leq b$ .
- On dit que  $b$  est une valeur approchée par excès de  $x$  à  $b - a$  près lorsque  $x$  vérifie  $a \leq x \leq b$ .
- On dit que  $\frac{a+b}{2}$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\frac{a-b}{2}$  près (ou à la précision  $r$ ) lorsque  $x$  vérifie  $a \leq x \leq b$ .

## Exemple

### 5-2/ Partie entière

Pour tout nombre réel  $x$  il existe un nombre entier relatif unique  $p$  tel que  $p \leq x < p + 1$ .

Le nombre  $p$  s'appelle la partie entière de  $x$ , on note :  $E(x) = p$ .

### 5-2/ Approximation décimale

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$  alors il existe un entier naturel  $p$  tel que  $n \times 10^{-p} \leq x \leq (n + 1) \times 10^{-p}$ ), d'où :

Le nombre décimal  $n \times 10^{-p}$  est appelé approximation décimale par défaut du nombre  $x$  à la précision  $10^{-p}$ .

Le nombre décimal  $(n + 1) \times 10^{-p}$  est appelé approximation décimale par excès du nombre  $x$  à la précision  $10^{-p}$ .

## VI- Exercices

### 6-1/ Exercice 1

Soient  $A = 3\sqrt{18} - \sqrt{72}$  et  $B = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$

1. Montrer que  $A - B = \sqrt{2} - 2\sqrt{7}$
2. Comparer  $A$  et  $B$

On pose  $x = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$  et  $y = \sqrt{39 - 12\sqrt{10}}$

3. Montrer que  $x \geq 0$
4. Calculer  $x^2$  et  $y^2$
5. Comparer  $\frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{y}$

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels avec  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$

On pose  $X = \sqrt{a} + \sqrt{b}$  et  $Y = \sqrt{ab} + 1$

6. Montrer que  $X^2 - Y^2 = (a - 1)(1 - b)$
7. Comparer  $X$  et  $Y$

### 6-2/ Exercice 2

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $3 \leq a \leq 9$  et  $2 \leq b \leq 7$

1. Encadrer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & \leq a + b \leq \quad ; \quad \leq a - b \leq \\ & \leq a \times b \leq \quad ; \quad \leq 2a + 3b \leq \\ & \leq -a + 5b \leq \quad ; \quad \leq \frac{a}{b} \leq \\ & \leq \frac{2a+3b}{-a+5b} \leq \quad ; \quad \leq a^2 + b^2 \leq \end{aligned}$$

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $1 \leq x \leq 2$  et  $5 \leq y \leq 9$

2. Encadrer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} & \leq x + y \leq \quad ; \quad \leq x - y \leq \\ & \leq x \times y \leq \quad ; \quad \leq \frac{x}{y} \leq \end{aligned}$$

### 6-3/ Exercice 3

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$  avec  $a \in ]0; 1[$  et  $b = \frac{1+\sqrt{a}}{2}$

1. Montrer que  $\frac{1}{2} < b < 1$
2. Montrer que  $b - 1 = \frac{a-1}{2(1+\sqrt{a})}$
3. En déduire que  $|b - 1| < \frac{1}{2} |a - 1|$
4. Déduire une valeur approchée de  $\frac{1+\sqrt{0,6}}{2}$  à  $2 \times 10^{-1}$  près.

### 6-4/ Exercice 4

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On pose  $E = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ .

1. Montrer que  $E - 1 = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1 + x^2}$
2. Montrer que  $x^2 + \sqrt{1+x^2} + 1 \geq 2$
3. Déduire que  $|E - 1| \leq \frac{1}{2} |x^2|$
4. Déterminer une valeur approchée de  $\frac{1}{\sqrt{1,0004}}$  à  $2 \times 10^{-4}$  près.