Mathématiques : Tronc Commun

Séance 5 (L'ordre dans IR)

**Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak**

Sommaire



---

## I- Ordre et opérations dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

### 1-1/ Ordre dans $\mathbb{R}$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

- Si $a \leq b$ alors $(a-b) \leq 0$ , on dit que $(b-a) \in \mathbb{R}^{-}$
- Si $a < b$ alors $(a-b) < 0$ , on dit que $(b-a) \in \mathbb{R}^{-*}$
- Si $a \geq b$ alors $(a-b) \geq 0$ , on dit que $(b-a) \in \mathbb{R}^{+}$
- Si $a > b$ alors $(a-b) > 0$ , on dit que $(b-a) \in \mathbb{R}^{+*}$
- 

### Exemple

## 1-2/ Propriétés de l'ordre et les opérations

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$ (l'ordre est transitive).

Si $a \leq b$, alors $a+c \leq b+c$ et $a-c \leq b-c$.

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a+c \leq b+d$ (l'ordre est compatible avec l'addition).

Si $a \leq b$ et $c > 0$, alors $a \times c \leq b \times c$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.

Si $a \leq b$ et $c < 0$, alors $a \times c \geq b \times c$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.

Si $a$ et $b$ sont non nuls et de même signe, on a : $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Si $a$ et $b$ sont positifs, on a $a \leq b$ équivaut $a^2 \leq b^2$.

Si $a$ et $b$ sont positifs, on a $a \leq b$ équivaut $a^n \leq b^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)

Si $a$ et $b$ sont positifs, on a $a \leq b$ équivaut $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

# II- Les intervalles – L'encadrement

## 2-1/ Les intervalles

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.

Pour les intervalles suivants $[a, b]$ et $]a, b[$ et $[a, b[$ et $]a, b]$, on a :

$a$ et $b$ sont appelés les extrémités des intervalles.

Le nombre positif $b-a$ est appelé la distance entre $a$ et $b$.

Le nombre positif $b-a$ est appelé la longueur (ou capacité) des intervalles précédents.

Le nombre $x_0 = \frac{a+b}{2}$ représente le centre des intervalles précédents .

Le nombre positif $r = \frac{b-a}{2}$ représente le rayon des intervalles précédents.

Les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ et ne sont pas des nombres.

$\mathbb{R}^{+*} = ]0; +\infty[$
$\mathbb{R}^{+} = [0; +\infty[$
$\mathbb{R}^{-*} = ]-\infty; 0[$
$\mathbb{R}^{-} = ]-\infty; 0]$
$]a; a[ = \emptyset$

$\emptyset$ est un intervalle appelé ensemble vide.

## 2-2/ L'encadrement

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Réaliser un encadrement du nombre $x$, c'est trouver deux nombres réels $a$ et $b$ tel que $a \leq x \leq b$ ou bien $a \leq x < b$ ou bien $a < x \leq b$ ou bien $a < x < b$.

Le nombre réel positif $b - a$ s'appelle l'amplitude de cet encadrement.

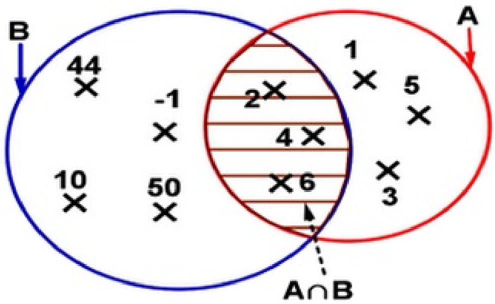
# III- Intersections et réunions d'intervalles

## 3-1/ Intersections d'intervalles

$A$ et $B$ sont deux ensembles.

Tous les éléments communs de $A$ et de $B$ constituent l'ensembles noté $A \cap B$ appelé intersection de $A$ et $B$.

Donc : $A \cap B = \{x / x \in A \; et \; x \in B\}$

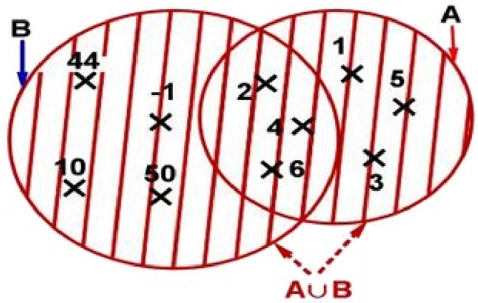



## 3-2/ Réunions d'intervalles

$A$ et $B$ sont deux ensembles.

Tous les élémentsqui appartiennent soit à $A$ ou soit à $B$ constituent l'ensembles noté $A \cup B$ appelé union de $A$ et $B$.

Donc : $A \cup B = \{x / x \in A \; ou \; x \in B\}$




# IV- Valeur absolue d'un nombre réel

## 4-1/ Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$(D)$ est une droite graduée d'origine $O$ et d'unité de mesure $OI = 1$.

Le point $M$ est un point de $(D)$ dont l'abscisse est $x$.

La valeur absolue du nombre $x$ est la distance $OM$, on note $OM = |x|$.


### Remarques

$$|-x| \geq 0$$
$$x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$$
$$|0| = 0$$
$$|-x| = |x|$$

## 4-2/ Propriétés de la valeur absolue

Pour tout $a$ de $\mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Pour tous $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$, on a $|a \times b| = |a| \times |b|$.

Pour tout $a$ de $\mathbb{R}$, on a $|a^n| = |a|^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et $|a^{-n}| = |a|^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Pour tous $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$, on a $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Pour tout $b$ de $\mathbb{R}^*$, on a $\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}$.

Pour tous $a$ de $\mathbb{R}$ et $b$ de $\mathbb{R}$, on a $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

Pour tous $a$ et $b$ de $\mathbb{R}$, on a $|a| = |b|$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$.

### Exemple

## 4-3/ Distance et valeur absolue

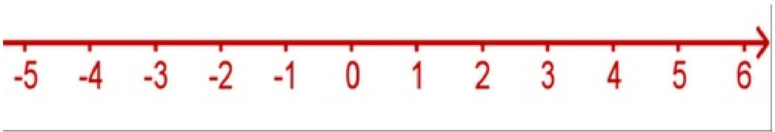
### Définition

Soit une droite graduée d'origine $O$.

Notons $A$ d'abscisse $a$ et $B$ d'abscisse $b$.

Le nombre positif $|b - a|$ est appelé la distance entre les points entre $A$ et $B$.

On a $AB = |b - a|$.




### Propriétés

Soit $x \in \mathbb{R}$ de et $r \in \mathbb{R}^+$

$|x| \leq r$ équivaut à $-r \leq x \leq r$.

$|x| < r$ équivaut à $-r < x < r$.

$|x| \geq r$ équivaut à $x \leq -r$ ou $x \geq r$.

$|x| > r$ équivaut à $x < -r$ ou $x > r$.

$|x - x_0| \leq r$ équivaut à $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$.

On a $[a, b] = [x_0 - r, x_0 + r]$ avec $x_0 = \frac{a+b}{2}$ centre de l'intervalle et $r = \frac{b-a}{2}$ son rayon.

# V- Approximation – Approximation décimale

## 5-1/ Approximation

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$.

- On dit que $a$ est une valeur approchée (ou approximation) de $x$ à $r$ près (ou à la précision $r$ ) lorsque $x$ vérifie $|x-a| \leq r$.

- On dit que $a$ est une valeur approchée par défaut de $x$ à $b-a$ près lorsque $x$ vérifie $a \leq x \leq b$.

- On dit que $b$ est une valeur approchée par excès de $x$ à $b-a$ près lorsque $x$ vérifie $a \leq x \leq b$.

- On dit que $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de $x$ à $\frac{a-b}{2}$ près (ou à la précision $r$) lorsque $x$ vérifie $a \leq x \leq b$.

**Exemple**

## 5-2/ Partie entière

Pour tout nombre réel $x$ il existe un nombre entier relatif unique $p$ tel que $p \leq x < p+1$.

Le nombre $p$ s'appelle la partie entière de $x$, on note : $E(x) = p$.

## 5-2/ Approximation décimale

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$ alors il existe un entier naturel $p$ tel que $n \times 10^{-p} \leq x \leq (n+1) \times 10^{-p}$ ), d'où :

Le nombre décimal $n \times 10^{-p}$ est appelé approximation décimale par défaut du nombre $x$ à la précision $10^{-p}$ .

Le nombre décimal $(n+1) \times 10^{-p}$ est appelé approximation décimale par excès du nombre $x$ à la précision $10^{-p}$ .

# VI- Exercices

## 6-1/ Exercice 1

Soient $A = 3\sqrt{18} - \sqrt{72}$ et $B = \sqrt{28} + \sqrt{32} - 2\sqrt{2}$

1. Montrer que $A - B = \sqrt{2} - 2\sqrt{7}$
2. Comparer $A$ et $B$

On pose $x = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ et $y = \sqrt{39 - 12\sqrt{10}}$

3. Montrer que $x \geq 0$
4. Calculer $x^2$ et $y^2$
5. Comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$

Soient $a$ et $b$ des nombres réels avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$

On pose $X = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ et $Y = \sqrt{ab} + 1$

6. Montrer que $X^2 - Y^2 = (a-1)(1-b)$
7. Comparer $X$ et $Y$

## 6-2/ Exercice 2

Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $3 \leq a \leq 9$ et $2 \leq b \leq 7$

1. Encadrer les expressions suivantes :

$$\leq a+b \leq \quad ; \quad \leq a-b \leq$$
$$\leq a\times b \leq \quad ; \quad \leq 2a+3b \leq$$
$$\leq -a+5b \leq \quad ; \quad \leq \frac{a}{b} \leq$$
$$\leq \frac{2a+3b}{-a+5b} \leq \quad ; \quad \leq a^2+b^2 \leq$$

Soient $x$ et $y$ deux réels tels que $1 \leq x \leq 2$ et $5 \leq y \leq 9$

2. Encadrer les expressions suivantes :

$$\leq x+y \leq \quad ; \quad \leq x-y \leq$$
$$\leq x\times y \leq \quad ; \quad \leq \frac{x}{y} \leq$$

## 6-3/ Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a \in ]0;1[$ et $b = \frac{1+\sqrt{a}}{2}$

1. Montrer que $\frac{1}{2} < b < 1$
2. Montrer que $b-1 = \frac{a-1}{2(1+\sqrt{a})}$
3. En déduire que $|b-1| < \frac{1}{2}|a-1|$
4. Déduire une valeur approchée de $\frac{1+\sqrt{0{,}6}}{2}$ à $2\times 10^{-1}$ prés.

## 6-4/ Exercice 4

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose $E = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que $E-1 = \frac{-x^2}{\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$
2. Montrer que $x^2+\sqrt{1+x^2}+1 \geq 2$
3. Déduire que $|E-1| \leq \frac{1}{2}|x^2|$
4. Déterminer une valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt{1{,}0004}}$ à $2\times 10^{-4}$ prés.