Mathématiques : Tronc Commun

Séance 4 (La projection dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Projection d'un point sur une droite parallèlement à une autre droite

1-1/ Vocabulaire

1-2/ Définition

1-3/ Cas particulier

II- Théorème de Thalès direct et réciproque en utilisant la projection

2-1/ Théorème de Thalès direct

2-2/ Théorème de Thalès réciproque

III- Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

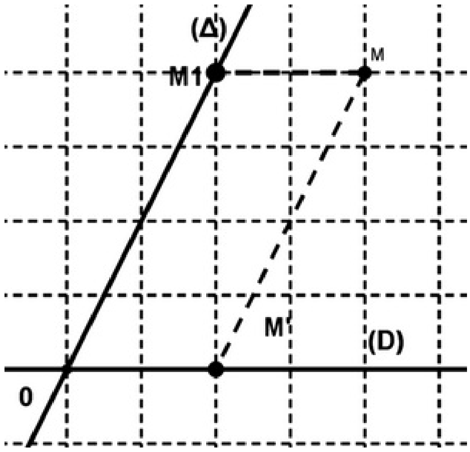
I- Projection d'un point sur une droite parallèlement à une autre droite

1-1/ Vocabulaire

Le point M' est appelé projection du point M sur (D) parallèlement à la droite (Δ).

La droite (Δ) est appelée la direction de la projection .

Le point M_1 est appelé projection du point M sur (Δ) parallèlement à la droite (D).

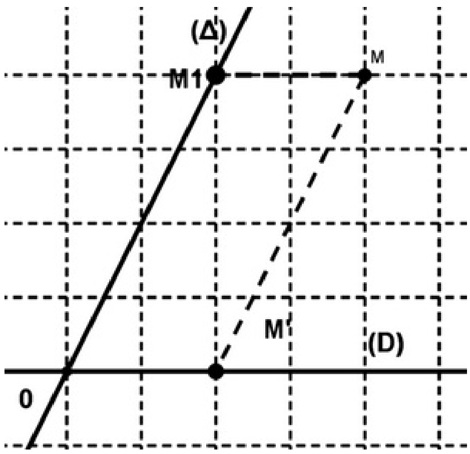


1-2/ Définition

(D) et (Δ) sont deux droites sécantes en O.

M est un point du plan (P).

La droite qui passe par le point M et parallèle à la droite (Δ) coupe la droite (D) en un point M' qui est appelé la projection du point M sur (D) parallèlement à la droite (Δ).



1-3/ Cas particulier

Si $(D) \perp (\Delta)$, le point M' est appelé la projection orthogonale de M sur la droite (D).

La relation p est appelé la projection orthogonale dans le plan (P).

Si (D) n'est pas perpendiculaire à (Δ), La relation p est appelé projection oblique ou simplement projection.

II- Théorème de Thalès direct et réciproque en utilisant la projection

2-1/ Théorème de Thalès direct

Énoncé du théorème

(D_1) et (D_2) sont deux droites sécantes en O.

Soient A et B deux points distincts de (D_1).

Soient A' et B' deux points distincts de (D_2) tel que $(AA') \parallel (BB')$

On a :

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'}$$

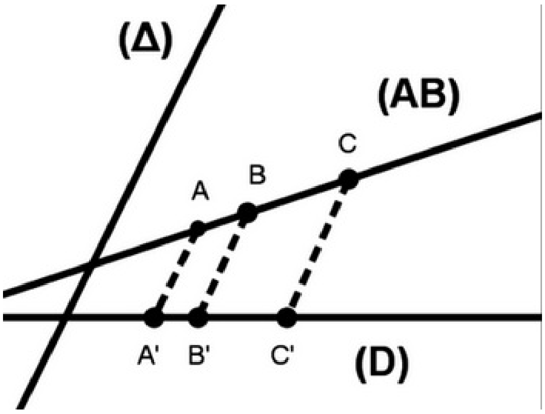
Théorème direct de Thalès exprimé en utilisant la projection

(D) et (Δ) sont deux droites sécantes à une troisième droite.

A et B et C sont trois points distincts alignés tel que (AB) n'est pas parallèle à (Δ).

A' et B' et C' sont leurs projections respectivement sur (D) parallèlement à (Δ).

On a : $\frac{AC}{AB} = \frac{A'C'}{A'B'}$



2-2/ Théorème de Thalès réciproque

Énoncé du théorème

(D) et (Δ) sont deux droites sécantes en A.

A et B et C sont trois points de (D).

A' et B' et C' sont trois points de (Δ) dans le même ordre que A et B et C.

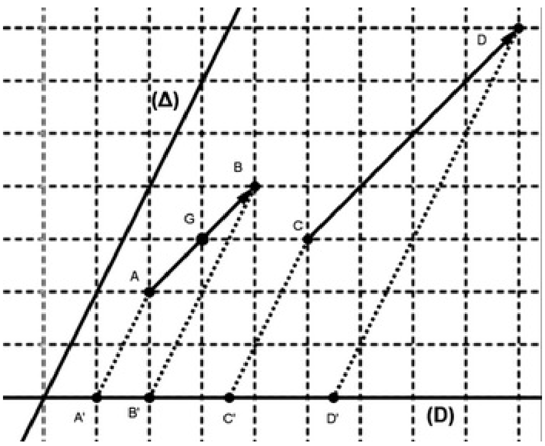
Si $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$ alors $(BB') \parallel (CC')$.

III- Conservation du coefficient de colinéarité de deux vecteurs

(D) et (Δ) sont deux droites sécantes et $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$ (le nombre k s'appelle le coefficient de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$)

si A' et B' et C' et D' sont les projetés respectfs des points A, B, C, et D sur (D) parallèlement à (Δ).

Alors on a $\overrightarrow{C'D'} = k\overrightarrow{A'B'}$, on dit la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.



IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$.

Soit D un point vérifiant $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AI}$.

E est le projeté de D sur (BC) parallèlement à (AB), et F est le projeté de D sur (BC) parallèlement à (AC).

1. Construire une figure.
2. Montrer que $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CI}$.
3. En déduire que I est le milieu de $[EF]$.

4-2/ Exercice 2

Soit ABC un triangle et soient D un point de la droite (BC) $(D \notin [BC])$, et O un point du plan tel que $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Soient E et F deux points du plan tels que :

E est le projeté du point D sur la droite (AC) parallèlement à la droite (OC).

F est le projeté du point D sur la droite (AB) parallèlement à la droite (OB).

1. Montrer que $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$.
3. Montrer que $(EF) \parallel (BC)$.

4-3/ Exercice 3

$ABCD$ un parallélogramme et E un point tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

F est le projeté du point E sur (BC) parallèlement à (AB).

1. Montrer que $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Soit M un point tel que $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

3. Montrer que $(ME) \parallel (BC)$.

4-4/ Exercice 4

ABC est un triangle.

Soient E et F deux points du plan tels que: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

On considère E' et F' les projetés respectifs de E et F sur la droite (AC) parallèlement à (BC).

1. Construire une figure convenable.
2. Écrire les vecteurs $\overrightarrow{AE'}$ et $\overrightarrow{AF'}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que $\overrightarrow{EE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{FF'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
4. Conclure que $\frac{EE'}{FF'} = \frac{2}{3}$.