Mathématiques : Tronc Commun

Séance 3 (Calcul vectoriel dans le plan)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Rappel (Vecteurs du plan)

- A et B deux points distincts du plan (P).
  + La direction de $\overrightarrow{AB}$ est la droite (AB).
  + Le sens de $\overrightarrow{AB}$ est celui de la demi droite $[AB)$.
  + La longueur ou norme de $\overrightarrow{AB}$, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$, est la distance de A à B.

- Cas particulier si $(A = B)$: alors Le vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}$ c'est le vecteur nul.

- Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si ils ont même direction et même sens et même longueur.

- $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

II- Opérations dans l'ensemble des vecteurs du plan (P)

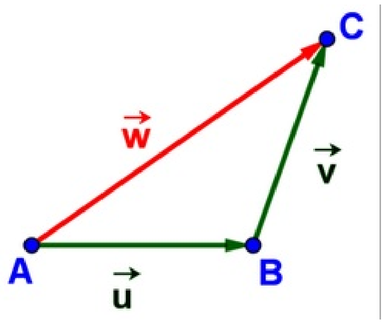
2-1/ Somme de deux vecteurs

Définition

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan (P).

La somme des vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$.

On écrit : $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.



Propriétés

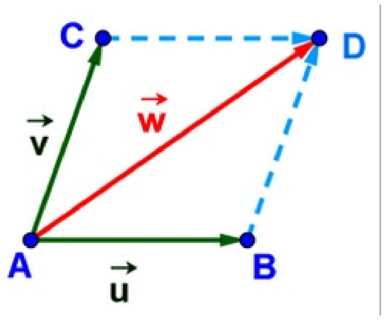
- *quelque soit* $A, B, C \in (P)$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelé relation de Chasles.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ (qui a la même direction, la même norme (longueur) de $\overrightarrow{AB}$ mais de sens contraire de $\overrightarrow{AB}$) et on a $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Règle du parallélogramme

Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan (P).

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si le point D vérifie $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ou bien $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



2-2/ Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un nombre non nul.

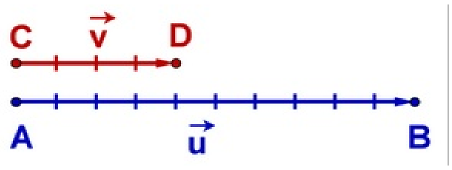
Le produit d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ par un réel k (ou un scalaire) est le vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ qui vérifie :

1- $\overrightarrow{v}$ a la direction parallèle à la direction du vecteur $\overrightarrow{u}$.

2- $\overrightarrow{v}$ a pour sens :

- Celui de $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$.
- Contraire de $\overrightarrow{u}$ si $k < 0$.

3- $\overrightarrow{v}$ de norme (longueur) égale à la norme (longueur) de $\overrightarrow{u}$ multipliée par $|k|$, ou encore : $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|$.



Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réel k et k', on a :

$(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

$k\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$

$k.\left(k'.\vec{u}\right) = k'.\left(k.\vec{u}\right) = (k.k')\vec{u}$

$1.\vec{u} = \vec{u}$

$k.\vec{u} = \vec{0}$ $alors$ $\left(k = 0 \; ou \; \vec{u} = \vec{0}\right)$

III- Vecteurs colinéaires

Définition

- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

- Trois points A et B et C du plan (P) sont alignés si et seulement si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont alignés (ou encore il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB}$).

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont alignés (ou encore il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \alpha\,\overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$).

Exemple

IV- Milieu d'un segment

4-1/ Milieu d'un segment

Définition

$[AB]$ est un segment du plan (P).

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Propriétés

- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

- Le point I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BI}$.

- Le point I est le milieu dusegment $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

- Soit le point I est le milieu du segment $[AB]$ et soit M un point du plan on a:
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

soit ABCD un parallélogramme

1. Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$
2. Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{NM} = \frac{9}{2}\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que M,N et C sont alignés

5-2/ Exercice 2

soit ABC un triangle et I le milieu de segment $[AB]$ et J le milieu de segment $[AC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Soit M et N deux points du plan tels que $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BJ}$ *et* $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CI}$.

2. Quelle la nature de $ACBN$ et $ABCM$?
3. Montrer que A, M et N sont alignés.

5-3/ Exercice 3

soit A, B, C et M quatre points du plan et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1. Montrer que $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$
2. soit $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{BA} - 6\overrightarrow{BC}$. Montrer que $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

5-4/ Exercice 4

soit ABCD un parallélogramme et M et N deux points du plan tels que
$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$

1. Construire une figure convenable.
2. Montrer que $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DC}$
3. En déduire que M,N et C sont alignés.
4. soit E le milieu du $[DN]$ et F le point du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BF}$. Montrer que C est le milieu du $[EF]$
5. Montrer que $(BD) \parallel (EF)$.