Mathématiques : Tronc Commun

Séance 1 (Les ensembles de nombres IN, Z, Q, ID et IR)

Professeur : Mr ETTOUHAMY Abdelhak

Sommaire

I- Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$

1-1/ L'ensemble $\mathbb{N}$ (nombres entiers naturels)

Les nombres entiers naturels forment un ensemble appelé ensemble des nombres entiers naturels. On le note $\mathbb{N}$.

On écrit : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, on dit que $\mathbb{N}$ est écrit en extension .

L'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ est noté $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$.

1-2/ L'ensemble $\mathbb{Z}$ (nombres entiers relatifs)

Les nombres entiers relatifs forment un ensemble appelé ensemble des nombres entiers relatifs, on le note $\mathbb{Z}$.

On écrit : $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$, on dit que $\mathbb{Z}$ est écrit en extension.

L'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots\ldots -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ est noté $\mathbb{Z}^*$, on a $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$.

L'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ est l'ensemble des entiers positifs, on note $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$, on a $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$ (ou encore $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$).

L'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ est l'ensemble des entiers strictement positifs, on le note $\mathbb{Z}^{+*} = \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $\{0, -1, -2, -3, \ldots\ldots\}$ est l'ensemble des entiers négatifs , on le note $\mathbb{Z}^-$.

L'ensemble $\{-1, -2, -3, \ldots\ldots\}$ est l'ensemble des entiers strictement négatifs , on le note $\mathbb{Z}^{-*}$.

1-3/ L'ensemble $\mathbb{D}$ (nombres décimaux)

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire par un nombre fini de chiffres après la virgule, par exemple $-15,237$ et $0,21$ et $\frac{3}{4} = 0,75$ sont des nombres décimaux ; mais $0,666666\ldots$ n'est pas un nombre décimal.

Pour comprendre la définition mathématique exacte de l'ensemble des nombres décimaux, on remarque que : $-15,237 = -\frac{15237}{1000} = -\frac{15237}{10^3}$ et $0,21 = \frac{21}{100} = \frac{21}{10^2}$.

D'où : Les nombres décimaux forment un ensemble appelé ensemble des nombres décimaux.

On le note $\mathbb{D}$. Avec : $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}\right\}$

1-4/ L'ensemble $\mathbb{Q}$ (nombres rationnels)

On a : $\frac{2}{3} = 0,6666666\ldots \notin \mathbb{D}$

$\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel (du latin ratio= fraction).

Chaque nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b sont des entiers (avec $b \neq 0$ on préfère $b > 0$).

On note l'ensemble des nombres rationnels par $\mathbb{Q}$.

1-5/ L'ensemble $\mathbb{R}$ (nombres réels)

$\sqrt{2} = 1,4121356\ldots$ et $\pi = 3,141592653589\ldots$ sont des nombres irrationnels .

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment un ensemble appelé ensemble des nombres réels, on note cet ensemble par : $\mathbb{R}$.

On a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls.

$\mathbb{R}^+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.

$\mathbb{R}^{+*}$ est l'ensemble des nombres réels positifs non nuls.

$\mathbb{R}^{-}$ est l'ensemble des nombres réels négatifs.

$\mathbb{R}^{+} \cup \mathbb{R}^{-} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{+} \cap \mathbb{R}^{-} = \{0\}$

II- Règles de calculs

2-1/ Les fractions

Soient a et b et c et d des nombres réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

On a :

$$\begin{gathered}
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \\
\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd} \\
\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \\
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}
\end{gathered}$$

2-2/ Les racines carrées

La racine carrée d'un nombre positif x est le nombre positif a tal que $a^2 = x$.

Le nombre a est noté $a = \sqrt{x}$.

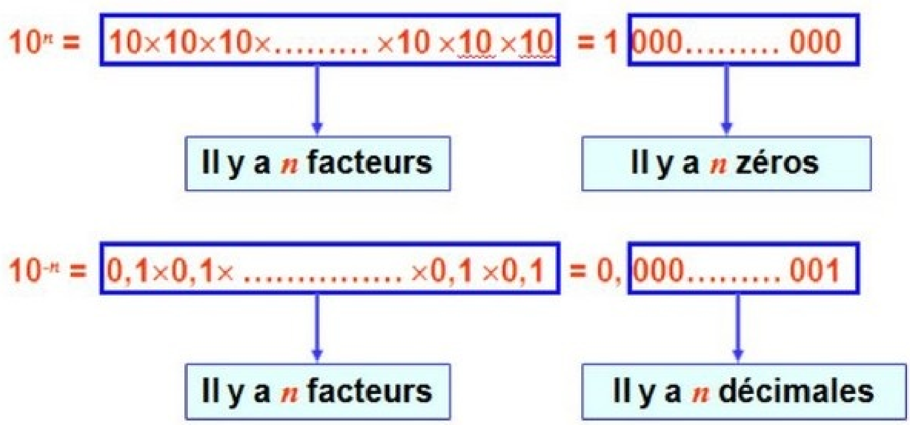
2-3/ Les identités remarquables

a et b sont des nombres réels.

On a :

$$\begin{gathered}
(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\
(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\
(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \\
(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \\
a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)
\end{gathered}$$

2-4/ Les puissances de 10



2-5/ L'écriture scientifique

Écrire un nombre en écriture scientifique c'est de l'écrire sous la forme :

Exemples

III- Exercices

3-1/ Exercice 1

1. Montrer que :

$$A = \frac{\left(9^{n+1}+9^{n}\right)^{2}}{\left(3^{2n+1}-3^{2n}\right)^{2}} \in \mathbb{N}$$

$$B = \sqrt{2\sqrt{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} + 5\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}} \in \mathbb{N}$$

Soit x un nombre réel strictement positif $(x > 3)$, tel que $x^2 - 3x - 4 = 0$

2. Montrer que $2\left(\sqrt{\frac{x-3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x-3}}\right) \in \mathbb{Z}$

3-2/ Exercice 2

1. Développer puis réduire les expressions suivantes :

$$A = (2x-1)^2 + (x+2)^3$$
$$B = (x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)$$
$$C = (x-3)\left(x^2 + 3x + 9\right)$$
$$D = (2x-1)^3 - (x+4)^2$$

2. Factoriser les expressions :

$$E = x^2 - 4 + (x+3)(x-2) - 3(x-2)^2$$
$$F = x^3 - 27 + 2\left(x^2 - 9\right) - 3x + 9$$
$$G = 4x^2 - 36x$$
$$H = x^3 - 1 + 3\left(x^2 - 1\right) - x + 1$$

3-3/ Exercice 3

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{\left(x^2 y\right)^{-3} \times z^2}{x y^2 \times z^{-3}}$$
$$B = \frac{\left(x^2 y\right)^{-3} \times x^3 z^{-2}}{x(zy)^2 \times y^{-1}}$$

On considère le nombre suivant : $E = \frac{6^{12} \times 25^{-2}}{15^8 \times 18^2}$

2. Déterminer les nombres entiers relatifs m et n tels que $E = 2^n \times 5^m$

3-4/ Exercice 4

On considère les nombres suivants : $a = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$ et $b = \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$

1. Calculer $a \times b$

On pose $u = a + b$ et $v = a - b$

2. Calculer u^2 et v^2 puis déduire u et v
3. Déduire une écriture simplifiée de a et b

On pose $X = \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$ et $Y = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$

4. Montrer que $XY = 1$
5. Calculer $(X+Y)^2$ et $(X-Y)^2$

3-5/ Exercice 5

1. Factoriser :

$$A = (x+2)^2 + x^2 - 4$$
$$B = (2x-1)^2 - (3x+2)^2$$
$$C = 27x^3 - 8$$
$$D = x^3 + 125 - 5x\,(x+5)$$

On pose : $a + b = 1$ et $a^2 + b^2 = 2$

2. Calculer $a^6 + b^6$ et $a^4 + b^4$.

Soit $c \in \mathbb{R}^*$. On pose : $x = c + \frac{1}{c}$

3. Calculer $c^2 + \frac{1}{c^2}$ et $c^3 + \frac{1}{c^3}$ en fonction de x.

3-6/ Exercice 6

Soient x et y deux nombres réels tel que $x \neq y$ et $2\left(x^2 + y^2\right) = 5xy$.

1. Calculer $\frac{x+y}{x-y}$.

Soient a, b et c trois nombres de $\mathbb{R}^*$ tel que $ab + bc + ca = 0$.

2. Calculer $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$.