

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

9-2/ Partie 2

9-3/ Partie 3

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ ; \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. a- Montrer que pour tout  $a \in [0; +\infty[$  :

$$\text{Arctan}(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{Arctan}(\sqrt{a})$$

2. b- En déduire que :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

9-2/ Partie 2

Calculer les limites suivantes :

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \sqrt[3]{x^{-2}}\right) \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Arctan}\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[4]{2-x} - \sqrt[6]{2-x}}{\sqrt[3]{2-x} - \sqrt{2-x}}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - (x+1)\right) \text{Arctan}\left(\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1\right)$$

9-3/ Partie 3

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty; \frac{\pi}{2} [$  par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x} + x - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \text{Arctan}(\sqrt[3]{x} + \tan x) & \text{si } x \in [0; \frac{\pi}{2}[ \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction  $f$  est continue en 0.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $I = [0; \frac{\pi}{2}[$ .

3. Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $I$ .

4. Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  sur  $I$ .

On note  $g^{-1}$  la fonction réciproque de  $g$ .

5. Résoudre dans  $I$  l'équation  $g^{-1}(x) = x$ .

6. Montrer que  $(\forall x \in I) g^{-1}(x) \leq x$ .