Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-4 : Limites et continuité - Problème de synthèse

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IX- Problème de synthèse

9-1/ Partie 1

1. Montrer que :

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[; \ \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

2. a- Montrer que pour tout $a \in [0;+\infty[$:

$$Arc\tan\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} Arc\tan\left(\sqrt{a}\right)$$

2. b- En déduire que :

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3}$$

9-2/ Partie 2

Calculer les limites suivantes :

$$1 \ \lim_{x\to 0^+} \left(1-\sqrt[3]{x^{-2}}\right)\left(Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$2 \ \lim_{x\to 0^+} \frac{Arc\tan\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)-\frac{\pi}{4}}{x}$$

$$3 \ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt[4]{2-x}-\sqrt[6]{2-x}}{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt{2-x}}$$

$$4 \ \lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-(x+1)\right) Arc\tan\left(\sqrt{x^2+2x}+x+1\right)$$

9-3/ Partie 3

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty ; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{1-x}+x-1 \ \ si \ \ x<0 \\ f(x) = Arc\tan\left(\sqrt[3]{x}+\tan x\right) \ \ si \ \ x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

3. Montrer que g est strictement croissante sur I.
4. Montrer que g est une bijection de I sur I.

On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

5. Résoudre dans I l'équation $g^{-1}(x) = x$.
6. Montrer que $(\forall x \in I)\ g^{-1}(x) \leq x$.