

### Sommaire

#### VI- Fonction réciproque d'une monotone continue et strictement monotone

6-1/ Théorème de la fonction réciproque

6-2/ Propriétés de la fonction réciproque

#### VII- Fonctions réciproques usuelles

7-1/ Fonction arctangente

7-2/ Fonction racine  $n^{\text{ième}}$

7-3/ Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

---

#### VI- Fonction réciproque d'une monotone continue et strictement monotone

6-1/ Théorème de la fonction réciproque

##### **Proposition 11**

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , alors elle réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ .

##### **Preuve**

##### **Applications**

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer puis déterminer une expression de  $f^{-1}(x)$  pour  $x \in J$  :

- 1  $f(x) = x^2 - 2x + 5$  ;  $I = [1; +\infty[$
- 2  $f(x) = 4x - x^2$  ;  $I = ] - \infty; 2[$
- 3  $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$  ;  $I = ] - \infty; 0]$
- 4  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$  ;  $I = [0; \sqrt{2}]$

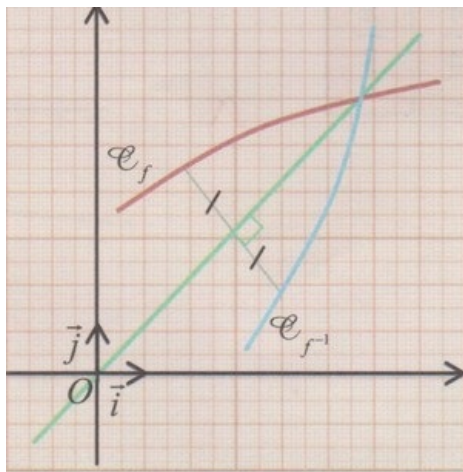
6-2/ Propriétés de la fonction réciproque

##### **Proposition 12**

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  alors :

- La fonction réciproque  $f^{-1}$  est continue sur  $f(I)$  et a le même sens de variation que la fonction  $f$ .
- Les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$ , dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation  $y = x$ ).

## Preuve



## VII- Fonctions réciproques usuelles

### 7-1/ Fonction arctangente

#### Définition 6

La fonction  $x \mapsto \tan x$  est une bijection de  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  sur  $\mathbb{R}$ .

Sa fonction réciproque est appelée fonction Arctangente, et la note  $\text{Arctan}$

#### Proposition 13

La fonction  $\text{Arctan}$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ . On a de plus :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) (\text{Arctan } x = y \Leftrightarrow x = \tan y)$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R} : \tan(\text{Arctan } x) = x$

Pour tout  $x \in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : \text{Arctan}(\tan x) = x$

La fonction  $\text{Arctan}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a pour tout

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 :$

$$(\text{Arctan } x_1 = \text{Arctan } x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2) \text{ et } (\text{Arctan } x_1 < \text{Arctan } x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2)$$

La fonction  $x \mapsto \text{Arctan } x$  est impaire :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$$

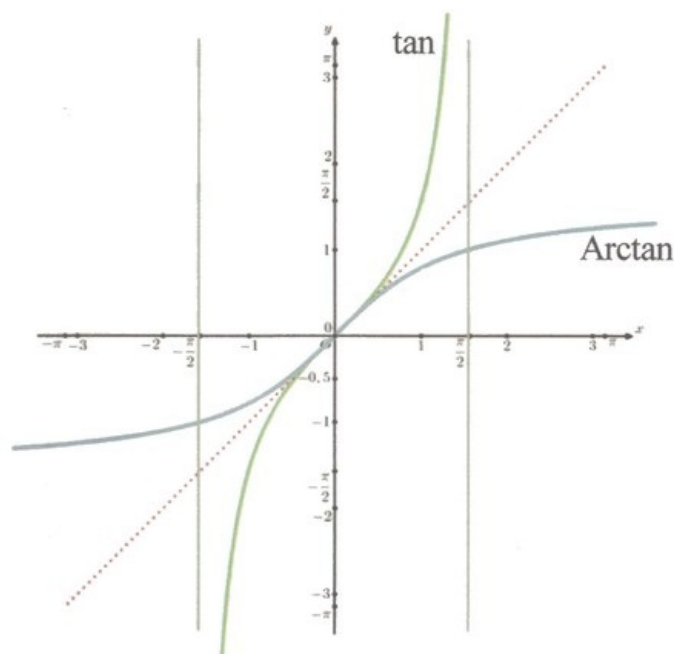
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan } x = \frac{\pi}{2} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan } x = -\frac{\pi}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan } x}{x} = 1$$

#### Tableau de quelques valeurs importantes

$x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
Arctan $x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

## La courbe représentative de la fonction Arctan



## 7-2/ Fonction racine $n^{\text{ième}}$

### Définition 7

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

La fonction  $x \mapsto x^n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Sa fonction réciproque est appelée la fonction racine  $n^{\text{ième}}$ , et on la note  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $\sqrt[n]{x}$  se lit «racine  $n^{\text{ième}}$  de  $x$ ».

### Proposition 14

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On a alors pour tous  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^+$  :

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x ; \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y ; \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :  $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$

La fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ , et de plus :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

### Remarque

Soit  $a$  un réel non nul et  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

L'ensemble des solutions de l'équation  $x^n = a$  dépend de signe du nombre  $a$  et de la parité de l'entier  $n$ .

Le tableau suivant résume les cas possibles :

Parité de $n$ Signe de $a$	$n$ pair	$n$ impair
$a > 0$	$S = \{-\sqrt[n]{a}; \sqrt[n]{a}\}$	$S = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a < 0$	$S = \emptyset$	$S = \{-\sqrt[n]{-a}\}$

### Proposition 15

Soit  $a$  et  $b$  deux réels, et  $p$  et  $n$  deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{ab} \\ \sqrt[n]{\frac{1}{a}} &= \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \quad (a \neq 0) \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0) \\ \sqrt[np]{\sqrt[n]{a^p}} &= \sqrt[n]{a} \\ \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^p}} &= \sqrt[p]{a} \\ (\sqrt[n]{a})^p &= \sqrt[n]{a^p} \end{aligned}$$

### Proposition 16

Soit  $u$  une fonction positive sur un intervalle ouvert  $I$  et  $x_0 \in I$ .

Si  $u$  est continue sur  $I$  alors la fonction  $\sqrt[n]{u}$  est continue sur  $I$ .

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = 1$

Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

## 7-3/ Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

### Définition 8

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $r$  un nombre rationnel.

On pose  $r = \frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ .

Le nombre  $a^r$  est le nombre  $\sqrt[q]{a^p}$ . Ce nombre est appelé la puissance rationnelle du nombre  $a$  d'exposant  $r$ .

### Remarque

Soit  $a$  un réel strictement positif et  $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ .

On a :  $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$  et  $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ .

De façon générale, on a l'égalité :  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ .

### Proposition 17

Soit  $r$  et  $r'$  deux nombres rationnels, et  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

Alors on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a^r \times a^{r'} &= a^{r+r'} ; \quad (ab)^r = a^r \times b^r \\ (a^r)^{r'} &= a^{r \cdot r'} ; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} \end{aligned}$$