AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 3-1-2 : Dérivation et étude des fonctions - Partie 1 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Exercices I

3-2/ Exercice 1-1

Pour chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction f en x_0 puis interpréter géométriquement les résultats obtenus :

$$1 \quad \begin{cases} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \; si \; 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x} \; si \; x > 1 \end{cases} \quad ; \quad x_0 = 1$$

$$2 \quad \begin{cases} f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \; si \; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad ; \quad x_0 = 0$$

$$3 \quad \begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} \; si \; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} Arc\tan \frac{1}{\sqrt{2-x}} \; si \; x < 2 \end{cases} \quad ; \quad x_0 = 2$$

3-4/ Exercice 1-2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par: $f\left(x\right) = x - \frac{1}{Arc\tan\,(x)}$

1. Dresser le tableau de variation de la fontion f
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$ et que $1 < \alpha < \sqrt{3}$
3. a) Montrer que f admet un réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

   b) Montrer que la fonction f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$

   c) Montrer que : $\left(f^{-1}\right)'\left(0\right) = \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

3-6/ Exercice 1-3

On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par : $g(x) = x - 3 + \sqrt{x^2 - x}$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction g à droite en 1 puis interpréter le résultat

géométriquement.

2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Montrer que g admet une fonction réciproque dont on déterminera le domaine de définition,
4. Montrer que g^{-1} est dérivable en $\left(\sqrt{2}-1\right)$ puis calculer $\left(g^{-1}\right)'\left(\sqrt{2}-1\right)$.

3-5/ Exercice 1-4

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]-\infty;0[$ par: $f\left(x\right) = Arc\tan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

1. Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ *et* $\lim\limits_{0^-} f\left(x\right)$
2. a) Montrer que f est continue sur I

   b) Montrer que f est monotone sur I
3. a) Montrer que f admet un fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.

   b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.
4. a) Vérifier que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$ puis calculer $f\left(-1\right)$ *et* $\left(f^{-1}\right)'\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

   b) Montrer que $\forall x \in I\ : f\left(x\right) = \frac{1}{2}Arc\tan\ x$ *et calculer* $f^{-1}\left(x\right)$ *pour tout* x *de* J