

Sommaire

III- Exercices I

3-1/ Exercice 1-1

3-2/ Exercice 1-2

3-3/ Exercice 1-3

3-4/ Exercice 1-4

III- Exercices I

3-2/ Exercice 1-1

Pour chacun des cas suivants, étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $x_0$  puis interpréter géométriquement les résultats obtenus :

$$\begin{array}{l} 1 \left\{ \begin{array}{l} f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3-x} \text{ si } x > 1 \end{array} \right. ; x_0 = 1 \\ 2 \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{x}} \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) = 0 \end{array} \right. ; x_0 = 0 \\ 3 \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3-2x^2} \text{ si } x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \text{Arc tan } \frac{1}{\sqrt{2-x}} \text{ si } x < 2 \end{array} \right. ; x_0 = 2 \end{array}$$

3-4/ Exercice 1-2

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par:  $f(x) = x - \frac{1}{\text{Arc tan}(x)}$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$  et que  $1 < \alpha < \sqrt{3}$
3. a) Montrer que  $f$  admet un réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$   
b) Montrer que la fonction  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$   
c) Montrer que :  $(f^{-1})'(0) = \frac{1+\alpha^2}{1+2\alpha^2}$

3-6/ Exercice 1-3

On considère la fonction  $g$  définie sur  $[1; +\infty[$  par :  $g(x) = x - 3 + \sqrt{x^2 - x}$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction  $g$  à droite en 1 puis interpréter le résultat

géométriquement.

2. Étudier les variations de la fonction  $g$ .
3. Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque dont on déterminera le domaine de définition,
4. Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable en  $(\sqrt{2} - 1)$  puis calculer  $(g^{-1})'(\sqrt{2} - 1)$ .

### 3-5/ Exercice 1-4

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = ]-\infty; 0[$  par:  $f(x) = \text{Arc tan}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

1. Calculer les limites :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  et  $\lim_{0^-} f(x)$
2. a) Montrer que  $f$  est continue sur  $I$   
b) Montrer que  $f$  est monotone sur  $I$
3. a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
b) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J$ .
4. a) Vérifier que  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$  puis calculer  $f(-1)$  et  $(f^{-1})'\left(-\frac{\pi}{8}\right)$   
b) Montrer que  $\forall x \in I : f(x) = \frac{1}{2} \text{Arc tan } x$  et calculer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x$  de  $J$