Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 3-1-1 : Dérivation et étude des fonctions - Partie 1 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

I- Dérivabilité d'une fonction numérique (rappels)

1-1/ Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel t tel que : $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = t$

Le nombre t est appelé le nombre dérivé de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Remarques

On trouve parfois, notamment en physique, la notation $\frac{df}{dx}(x_0)$ pour le nombre dérivé de f en x_0.

On trouve également, la notation $\dot{f}(x_0)$, lorsque la variable désigne le temps.

Un simple changement d'écriture montre, en s'appuyant sur la composition des limites, que f est dérivable en x_0 si la fonction $h \mapsto \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ a une limite finie en 0, et alors :

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

La notion de dérivabilité, étant définie à l'aide d'une limite, est une notion locale.

Définition 2

Soit f une fonction dérivable en x_0.

La droite (T) d’équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est appelée la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point d’abscisse x_0.

La fonction $x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ s'appelle l'approximation affine de f au voisinage de x_0.

On écrit alors : $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ au voisinage de x_0 ou
$f(x_0 + h) = hf'(x_0) + f(x_0)$ au voisinage de 0.

Proposition 1

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\mathrm{l} \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ tels que :

$$(\forall x \in I)\ f(x) = f(x_0) + \mathrm{l}(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$$

Dans ces conditions : $f'(x_0) = \mathrm{l}$

1-2/ Dérivabilité à droite - dérivabilité à gauche

Définition 3

1- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + r[$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que f est dérivable à droite de x_0 s’il existe un réel l_1 tel que :

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{l}_1$$

Le nombre l_1 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à droite en x_0. Il est noté $f'_d(x_0)$.

2- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - r, x_0]$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$.

On dit que est dérivable à gauche de x_0 s’il existe un réel l_2 tel que :

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{l}_2$$

Le nombre l_2 est appelé le nombre dérivé de la fonction f à gauche en x_0. Il est noté $f'_g(x_0)$.

Proposition 2

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I.

La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$,et alors : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

1-3/ Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition 4

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I.

On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point x de I.

On note f' la fonction qui à $x \in I$ associe le nombre dérivée de f en x.

On l'appelle la fonction dérivée de f, ou plus simplement la dérivée de f.

On écrit aussi : $f' = \frac{df}{dx}$

Tableau des dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	Domaine de dérivabilité
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax \quad (a \in \mathbb{R}^*)$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan x$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[\quad (k \in \mathbb{Z})$
$x \mapsto \sin(ax+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto a\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b) \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$x \mapsto -a\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$

1-4/ Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 3

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(\alpha f)' = \alpha f'$$
$$(f.g)' = f'.g + f.g'$$
$$(f^n)' = n.f'.f^{n-1}$$

Si la fonction g ne s'annule pas sur I, alors :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad ; \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

Enfin, si f est strictement positive sur I, alors :

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

II- Compléments sur la dérivation

2-1/ Dérivabilité et continuité

Proposition 4

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et x_0 un élément de I.

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Remarques

Une conséquence immédiate de la proposition 4 est la suivante :

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

La réciproque de la proposition 4 est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2-2/ Dérivée de la fonction composée

Proposition 5

Soit I et J deux intervalles ouverts, et $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques, avec $f(I) \subset J$.

Soit x_0 un élément de I.

Si :

- la fonction f est dérivable en x_0.
- la fonction g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$.

alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0, et de plus :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Corollaire

Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et de plus, pour tout $x \in I$: $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$.

2-3/ Dérivée de la fonction réciproque

Proposition 6

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$, alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et de plus :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Si f est dérivable sur I telle que la fonction f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.

De plus, on a pour tout $x \in J$:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

2-4/ Dérivée de la fonction arctangente

Proposition 7

La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Arc\tan'\left(x\right) = \frac{1}{1+x^2}$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto Arc\tan(u(x))$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$x \mapsto \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

2-5/ Dérivée de la fonction racine $n^{ième}$

Proposition 8

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\sqrt[n]{u\,(x)}\right)' = \frac{1}{n}u'\,(x)u(x)^{\frac{1}{n}-1} = \frac{u'(x)}{n.\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Proposition 9

Soit r un nombre rationnel non nul.

La fonction $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est la fonction $x \mapsto r.\,x^{r-1}$.

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left((u(x))^r\right)' = r.\,u'\left(x\right).\,(u(x))^{r-1}$$