AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 2-3-2 : Suites numériques - Partie 3 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

IIX- Exercices III

8-1/ Exercice 3-1

1. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = Arc\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

2. Calculer $lim u_n$.
3. Exprimer S_n en fonction de n. Préciser $lim S_n$.

8-2/ Exercice 3-2

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

1. Déterminer $f(I)$.

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. En déduire que (u_n) est convergente.
5. Calculer la limite de la suite (u_n).

8-3/ Exercice 3-3

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + {u_n}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

8-4/ Exercice 3-4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \ \left(\alpha > \sqrt[3]{a} \ et \ \alpha \in \mathbb{R}\right) \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{a}{{u_n}^2}\right) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{2u_n + \sqrt[3]{a}}{3{u_n}^2}\left(u_n - \sqrt[3]{a}\right)^2$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > \sqrt[3]{a}$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \frac{2}{3}\left(u_n - \sqrt[3]{a}\right)$
6. En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - \sqrt[3]{a} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(u_0 - \sqrt[3]{a}\right)$
7. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

8-6/ Exercice 3-5

Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{4}|u_n - u_{n-1}|$.

On considère les suites (α_n) et (β_n) définies par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha_n = u_{2n} \ et \ \beta_n = u_{2n+1}$$

4. Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$.
5. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha_n \leq \beta_n$.
6. Montrer que la suite (α_n) est croissante et la suite (β_n) est décroissante.
7. Monter que les suites (α_n) et (β_n) convergent et vers la même limite.
8. Monter que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$
9. En déduire la limite de la suite (u_n).
10. Déterminer un entier naturel N à partir duquel $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left|u_n - \sqrt{2}\right| < 10^{-2}$.