Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 2-3-1 : Suites numériques - Partie 3 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VI- suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_n = f(u_n)$

6-1/ Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Proposition 12

Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$.

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0} \in I$ et $(\forall n \geq n_0)\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite l alors l est solution de l'équation $f(x) = x$.

6-2/ Limite d'une suite de la forme $v_n = f(u_n)$

Proposition 13

Si une suite (u_n) est convergente vers l et f est une fonction continue en l, alors la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(l)$.

Applications

Déterminer les limites des suites définies par :

$$1\ \ u_n = \sqrt[3]{\frac{24n^4 - n + 1}{3n^4 - n^2 + 7}}$$

$$2\ \ v_n = \sqrt[4]{\frac{16n^3 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$$

VII- Suites adjacentes

Définition 8

On dit que deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont adjacentes si une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Applications

On considère les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

- Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Proposition 14

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite.

Applications

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Montrer que la suite $(u_n v_n)$ est constante, et en déduire la limite commune des suites (u_n) et (v_n).