# Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

## Séance 2-3-1 : Suites numériques - Partie 3 (Cours)

**Professeur : Mr CHEDDADI Haitam**

## Sommaire



---

## VI- suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $v_n = f(u_n)$

### 6-1/ Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

**Proposition 12**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ telle que $f(I) \subset I$.
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle définie par $u_{n_0} \in I$ et $(\forall n \geq n_0)\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente de limite $l$ alors $l$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

### 6-2/ Limite d'une suite de la forme $v_n = f(u_n)$

**Proposition 13**

Si une suite $(u_n)$ est convergente vers $l$ et $f$ est une fonction continue en $l$, alors la suite $(v_n)$ définie par $v_n = f(u_n)$ est convergente et sa limite est $f(l)$.

**Applications**

Déterminer les limites des suites définies par :

$$1 \quad u_n = \sqrt[3]{\frac{24n^4 - n + 1}{3n^4 - n^2 + 7}}$$

$$2 \quad v_n = \sqrt[4]{\frac{16n^3 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$$

## VII- Suites adjacentes

**Définition 8**

On dit que deux suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes si une est croissante, l'autre est décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

## Applications

On considère les suites numériques $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

- Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.

## Proposition 14

Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et ont la même limite.

## Applications

Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
$$\begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}, \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \leq v_n$
2. Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que $(v_n)$ est décroissante.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(v_n - u_n\right)$
4. En déduire que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
5. Montrer que la suite $(u_nv_n)$ est constante, et en déduire la limite commune des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.