AlloSchool

Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 2-2-1 : Suites numériques - Partie 2 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

III- Limite d'une suite numérique

3-1/ Suite de limite infinie

Définition 5

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $+\infty$ si tout intervalle de type $]A;+\infty[$, où $A>0$, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui revient à dire que :

$$(\forall A>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\geq N)\;u_n\in]A;+\infty[$$

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$, et on notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty \;ou\; lim\,(u_n)=+\infty$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ a pour limite $-\infty$ si tout intervalle de type $]-\infty;-A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang ; ce qui revient à dire que :

$$(\forall A>0)\,(\exists N\in\mathbb{N})\,(\forall n\geq N)\;u_n\in]-\infty;-A[$$

On dit alors que la suite$(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $-\infty$, et on notera :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \; ou \; lim\,(u_n) = -\infty$$

Remarques

Si $k \in \mathbb{R}_+^*$, alors on a l'implication :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} ku_n = +\infty$$

On a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$$

3-2/ Limite infinie des suites usuelles

Proposition 1

Les suites $\left(\sqrt{n}\right)_n$, $(n)_n$, $\left(n^2\right)_n$ et $\left(n^3\right)_n$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 2

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques telles que pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Proposition 3

Soit a un réel quelconque.

Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

Si $p \in \mathbb{N}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.

Applications

Déterminer les limites suivantes :

$$1 \; \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2017}{2016}\right)^n$$

$$2 \; \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n$$

$$3 \; \lim_{n\to+\infty} n^{2017}$$

$$4 \; \lim_{n\to+\infty} \left(n^3 + 2^n\right)$$

$$5 \; \lim_{n\to+\infty} \frac{5^n+2^n}{3^n}$$

3-3/ Convergence d'une suite numérique

Définition 6

Étant donné une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $\mathrm{l} \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers l, ou encore converge vers l, si tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ à partir d'un certain rang.

En d'autres termes :

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \geq N)\;;\;\; |u_n - l| < \varepsilon$$

Et on écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \; ou \; lim\,(u_n) = l$$

Définition 7

On dit qu'une suite numérique est convergente si elle admet une limite réelle.

Dans le cas contraire, on dit qu'elle est divergente.

Remarque

Dire qu'une suite diverge (ou qu'elle est divergente), ne signifie pas qu'elle tend vers l'infini.

Cela signifie exactement que la suite n'a pas de limite ou qu'elle tend vers l'infini.

Applications

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par $u_n = \frac{1}{n^2}$.

1. Montrer en utilisant la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

On considère les deux suites (v_n) et (w_n) définies par $v_n = \frac{7n-2}{3n+4}$ et $w_n = \frac{2n^2-\sin n}{n^2+3}$.

2. Montrer en utilisation la définition que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{7}{3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

3-4/ Convergence des suites usuelles

Proposition 4

Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$, $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geq 1}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3-5/ Unicité de la limite

Proposition 5

La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.

Proposition 6

Toute suite convergente est bornée. La réciproque est fausse.

3-6/ Opérations sur les limites

Proposition 7

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes. Alors :

La suite $(u_n + v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, et de plus : $lim\,(u_n + v_n) = lim\,(u_n) + lim\,(v_n)$.

La suite $(u_n.\,v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, et de plus : $lim\,(u_n.\,v_n) = lim\,(u_n) \times lim\,(v_n)$.

Si $lim\,(v_n) \neq 0$, alors la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente, et de plus : $lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{lim(u_n)}{lim(v_n)}$.

Applications

Calculer la limite de chacune des suites suivantes définies par :

1 $u_n = \frac{2\sqrt{n}-7}{7\sqrt{n}+3}$

2 $v_n = \frac{n^2-3n+4}{n^2+5n+7}$

3 $w_n = \frac{2n-3}{n^3+3n^2+1}$

4 $x_n = \frac{(n+4)(-3n^2+1)}{5n^3+8n}$

3-7/ Extension des opérations sur la limite de suite

On admet que les résultats sur les limites des fonctions restent valables pour les limites des suites :

- Limite d'une somme :

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

- Limite d'un produit :

$\lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim(u_n\times v_n)$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

- Limite d'une inverse :

$\lim u_n$	$\ell\neq 0$	$+\infty$ ou $+\infty$	0
$\lim\frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$\lim\frac{1}{\lvert u_n\rvert}=+\infty$

3-8/ Limites et ordre

Proposition 8

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites convergentes. Alors :

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive, alors $lim\ u_n \geq 0$.

Si $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$, alors $lim\ u_n \leq lim\ v_n$.

Remarque

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite convergente dont on souhaite montrer que sa limite est strictement positive, alors il suffit de chercher un réel $m > 0$ tel que $u_n \geq m$ à partir d'un certain rang.

3-9/ Monotonie et convergence

Théorème 1

Toute suite croissante majorée est convergente.

Toute suite décroissante minorée est convergente.

Ce résultat porte le nom de «Théorème de la convergence monotone».

Remarque

Le théorème de la convergence monotone assure la convergence de la suite mais ne détermine pas sa limite.

Applications

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$, est décroissante et minorée par $\frac{3}{2}$.
2. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (u_n) ?

Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite numérique définie par : $v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

3. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$: $k! \geq 2^{k-1}$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est majorée.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante puis en déduire qu'elle est convergente.

Proposition 9

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

IV- Critères de convergence

4-1/ Existence de la limite par encadrement

Théorème 2

Soit $(v_n)_{n\geq n_0}$ et $(w_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergeant vers une limite commune l.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite vérifiant l'encadrement $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut l.

Ce résultat est appelé «Théorème des gendarmes»

Applications

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_n = \frac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+1}$

1. Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Calculer les limites des suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par : $v_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$ et $w_n = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+k}}$.

Corollaire

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique et l un nombre réel.

S'il existe une suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ tendant vers 0 telle que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq v_n$, alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge et sa limite vaut l.

Proposition 10

Soit r un nombre rationnel non nul.

Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.

Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

4-2/ Limite d'une suite géométrique

Soit q un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$ alors $\lim q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim q^n = 1$.
- Si $q < -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.