Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-3-1 : Limites et continuité - Partie 3 (Cours)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

VI- Fonction réciproque d'une monotone continue et strictement monotone

6-1/ Théorème de la fonction réciproque

Proposition 11

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$.

Preuve

Applications

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer puis déterminer une expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$:

$$1 \;\; f(x) = x^2 - 2x + 5 \;\; ; \;\; I = \left[1; +\infty\right[$$

$$2 \;\; f(x) = 4x - x^2 \;\; ; \;\; I = \left]-\infty; 2\right[$$

$$3 \;\; f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x \;\; ; \;\; I = \left]-\infty; 0\right]$$

$$4 \;\; f(x) = \frac{x}{x^2+2} \;\; ; \;\; I = \left[0; \sqrt{2}\right]$$

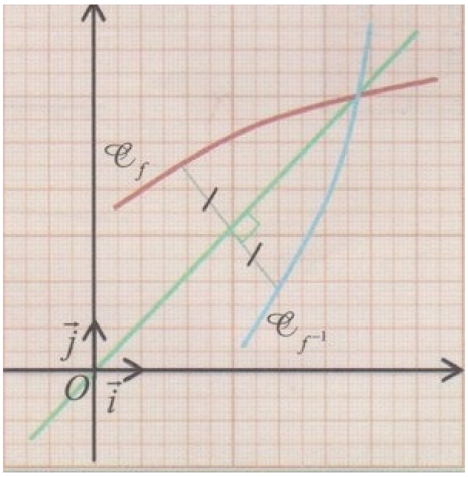
6-2/ Propriétés de la fonction réciproque

Proposition 12

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors :

- La fonction réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que la fonction f.
- Les courbes représentatives de f et de f^{-1}, dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire par rapport à la droite d'équation $y = x$).

Preuve



VII- Fonctions réciproques usuelles

7-1/ Fonction arctangente

Définition 6

La fonction $x \mapsto \tan x$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction réciproque est appelée fonction Arctangente, et la note Acrtan

Proposition 13

La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. On a de plus :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ \left(\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\right)\ \left(Arc\tan x = y \Leftrightarrow x = \tan y\right)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan(Arc\tan x) = x$

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$: $Arc\tan(\tan x) = x$

La fonction Arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$(Arc\tan x_1 = Arc\ \tan x_2\ \Leftrightarrow x_1 = x_2) \text{ et } (Arc\tan x_1 < Arc\ \tan x_2\ \Leftrightarrow x_1 < x_2)$$

La fonction $x \mapsto Arc\tan x$ est impaire :

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ Arc\tan(-x) = -Arc\tan(x)$$

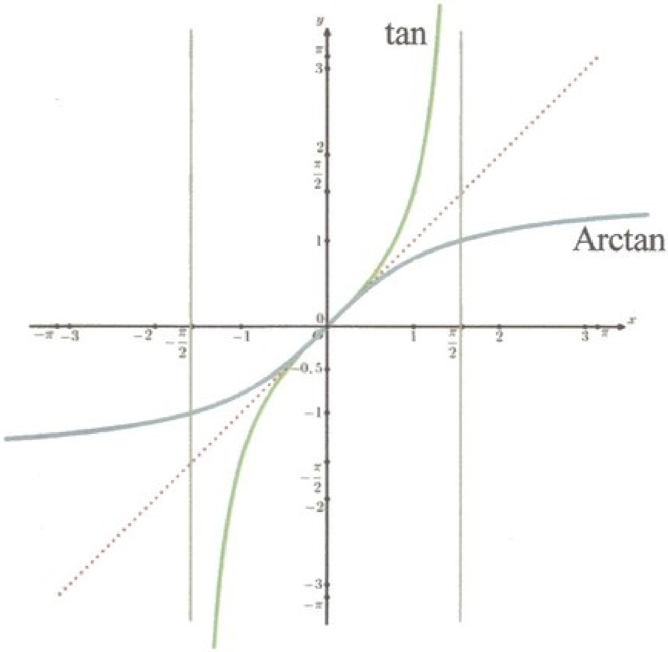
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} Arc\tan x = \frac{\pi}{2}\ ;\ \lim_{x \to -\infty} Arc\tan x = -\frac{\pi}{2}\ ;\ \lim_{x \to 0} \frac{Arc\tan x}{x} = 1$$

Tableau de quelques valeurs importantes

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan}\, x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

La courbe représentative de la fonction Arctan



7-2/ Fonction racine $n^{ième}$

Définition 7

Soit n un entier naturel non nul.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque est appelée la fonction racine $n^{ième}$, et on la note $\sqrt[n]{}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt[n]{x}$ se lit «racine $n^{ième}$ de x».

Proposition 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On a alors pour tous x et y de $\mathbb{R}^+$:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x \;\; ; \;\; \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y \;\; ; \;\; \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et de plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Remarque

Soit a un réel non nul et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x^n = a$ dépend de signe du nombre a et de la parité de l'entier n.

Le tableau suivant résume les cas possibles :

Parité de n / Signe de a	n pair	n impair
$a>0$	$S=\left\{-\sqrt[n]{a};\sqrt[n]{a}\right\}$	$S=\left\{\sqrt[n]{a}\right\}$
$a<0$	$S=\varnothing$	$S=\left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Proposition 15

Soit a et b deux réels, et p et n deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On a alors les propriétés suivantes :

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$
$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\ (a\neq 0)$$
$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0)$$
$$\sqrt[np]{a^p}=\sqrt[n]{a}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$$
$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p=\sqrt[n]{a^p}$$

Proposition 16

Soit u une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $x_0\in I$.

Si u est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{u}$ est continue sur I.

Si $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}=l$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{u(x)}=+\infty$

7-3/ Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

Définition 8

Soit a un réel strictement positif et r un nombre rationnel.

On pose $r=\frac{p}{q}$ avec $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$.

Le nombre a^r est le nombre $\sqrt[q]{a^p}$. Ce nombre est appelé la puissance rationnelle du nombre a d'exposant r.

Remarque

Soit a un réel strictement positif et $n\in\mathbb{N}*-\{1\}$.

On a : $\sqrt{a}=\sqrt[2]{a}=a^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt[3]{a}=a^{\frac{1}{3}}$.

De façon générale, on a l'égalité : $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 17

Soit r et r' deux nombres rationnels, et a et b deux réels strictement positifs.

Alors on a les égalités suivantes :

$$a^r\times a^{r'}=a^{r+r'}\ ;\ (ab)^r=a^r\times b^r$$
$$(a^r)^{r'}=a^{r.r'}\ ;\ a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}\ ;\ \frac{a^r}{a^{r'}}=a^{r-r'}$$