Mathématiques : 2Bac SMA-SMB

Séance 1-2-2 : Limites et continuité - Partie 2 (Exercices)

Professeur : Mr CHEDDADI Haitam

Sommaire

V- Exercices II

5-1/ Exercice 2-1

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f au point x_0 :

$$1 \begin{cases} f(x) = \frac{x^3-8}{\sqrt{x^2+5}-3} \ (x \neq 2) \\ f(2) = 18 \end{cases} ; \ x_0 = 2$$

$$2 \begin{cases} f(x) = \left(x^2-9\right)\sin\left(\frac{1}{x-3}\right) \ (x \neq 3) \\ f(3) = 0 \end{cases} ; \ x_0 = 3$$

$$3 \begin{cases} f(x) = \frac{(1-\tan x)^2}{1+\cos 4x} \ \left(x \neq \frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \ x_0 = \frac{\pi}{4}$$

5-2/ Exercice 2-2

On considère la fonction numérique g définie par :

$$\begin{pmatrix} g(x) = (2x+\pi)\tan x \ si \ x \in \left]-\pi;-\frac{\pi}{2}\right[\\ g(x) = \frac{1-\cos^3 x}{x.\tan x.\cos^2 x} \ si \ x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[\\ g(x) = \frac{3\sqrt{1+x^4}-x}{2+x} \ si \ x \in \left[0;+\infty\right[\end{pmatrix}$$

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) \;;\quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} g(x) \;;\quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} g(x)$$

2. Établir la continuité de la fonction g en 0.

5-3/ Exercice 2-3

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f admet un prolongement par continuité en x_0 puis donner ce prolongement :

$$1\;\; f(x) = \frac{2x^{17}-17x+15}{x-1} \;\;;\;\; x_0 = 1$$
$$2\;\; f(x) = \frac{x^n-a^n}{x-a} \;\;;\;\; x_0 = a \;\; (a \in \mathbb{R}\;,\; n \in \mathbb{N})$$
$$3\;\; f(x) = \frac{\sin\left(\pi\sqrt{\mathrm{cosx}}\right)}{x} \;\;;\;\; x_0 = 0$$
$$4\;\; f(x) = \frac{x^{p+1}-(p+1)x+p}{(x-1)^2} \;\;;\;\; x_0 = 1 \;\; (p \in \mathbb{N}^*)$$
$$5\;\; f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} \;\;;\;\; x_0 = \frac{\pi}{4}$$

5-4/ Exercice 2-4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{pmatrix} f(x) = \frac{x^3+6}{2x-3}\; si\; x \leq -1 \\ f(x) = \cos(\pi \mathrm{x})\; si\; -1 < x < 1 \\ f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}\; si\; x \geq 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5-5/ Exercice 2-5

1. Montrer que l'équation $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ admet une unique solution dans $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que la courbe de la fonction f, telle que $f(x) = 2x^3 + 3x + 4$ coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse α est tel que $-1 < \alpha < 0$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11$

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans $\mathbb{R}$, notées x_1, x_2 et x_3. (On adoptera l'ordre suivant $x_1 < x_2 < x_3$).
4. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

5-6/ Exercice 2-6

On considère la fonction f définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\; si\; 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $\left(\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\right)\; \sin x \leq x \leq \tan x$
2. En déduire que pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$: $0 < f(x) < \frac{1-\cos x}{\sin x}$
3. Étudier la continuité de f à droite de 0.

5-7/ Exercice 2-7

Soit f une fonction définie de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et continue sur $[0;1]$.

1. Établir que $(\exists c \in [0;1])\ f(c) + f(1-c) = 2c$

5-8/ Exercice 2-8

Soit $n \in \mathbb{N}* - \{1\}$.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

1. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{2n}{n+1}\right]$.
2. En déduire que $f\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$.
3. Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha \in \left]\frac{2n}{n+1}; 2\right[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
4. Vérifier que $\alpha^n = \frac{1}{2-\alpha}$.