Mathématiques : 3ème Année Collège

Séance 16 (Géométrie dans l'espace)

Professeur : Mr BENGHANI Youssef

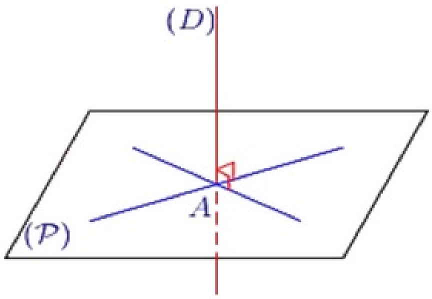
Sommaire

I- Orthogonalité dans l'espace

1-1/ Définition

Une droite (D) est perpendiculaire à un plan (P) en A, si elle est perpendiculaire à deux droites dans ce plan sécantes en A.

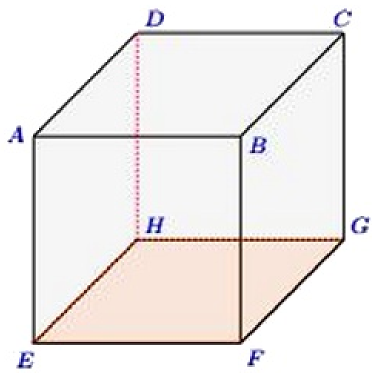
On écrit : $(D) \perp (P)$



Exemple

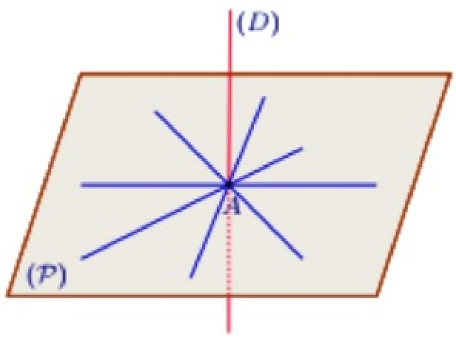
Soit $ABCDEFGH$ un cube.

- Montrer que la droite (AE) est perpendiculaire au plan $(EFGH)$.



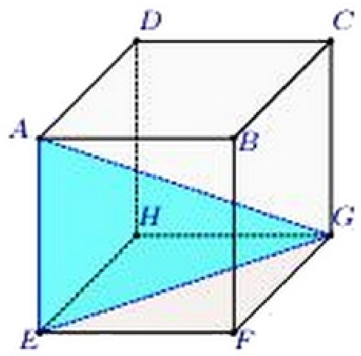
1-2/ Propriété

Si une droite est perpendiculaire à un plan en A, alors elle est perpendiculaire à tous droites incluse dans ce plan qui passent par A.



Soit $ABCDEFGH$ un cube.

- Montrer que le triangle AEG est rectangle en E.

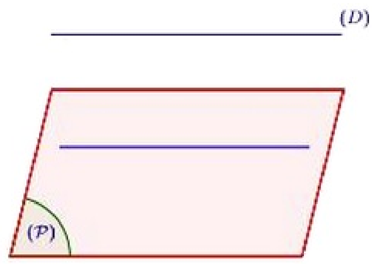


II- Parallélisme dans l'espace

2-1/ Définition

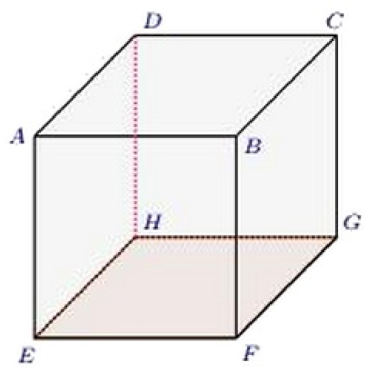
Une droite (D) est parallèle à un plan (P), si elle est parallèle à une droite dans ce plan.

On écrit : (D) // (P)



Soit $ABCDEFGH$ un cube.

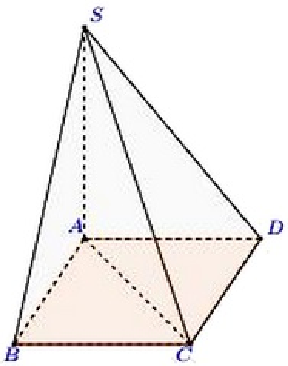
- Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan $(EFGH)$.



III- Théorème de Pythagore dans l'espace

Soit $SABCD$ une pyramide de base carré $ABCD$ et de hauteur (SA), tels que : $AB = 4cm$ et $SA = 6cm$.

1. Calculer AC
2. Calculer SC



IV- Agrandissement – Réduction

4-1/ Définition

En multipliant toutes les arêtes d'un solide par un même nombre positif non nul k, on obtiendra un agrandissement ou une réduction de ce solide.

k est appelé coefficient ou rapport d'agrandissement ou de réduction.

4-2/ Propriété

Dans un agrandissement ou une réduction d'un solide de rapport k :

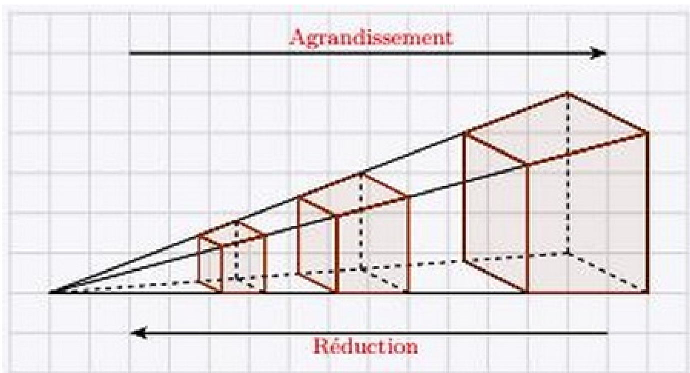
- Les longueurs sont multipliées par k.
- Les aires sont multipliées par k^2.
- Les volumes sont multipliés par k^3.

4-3/ Remarques

Si k est le rapport d'agrandissement, alors $\frac{1}{k}$ est le rapport de réduction.

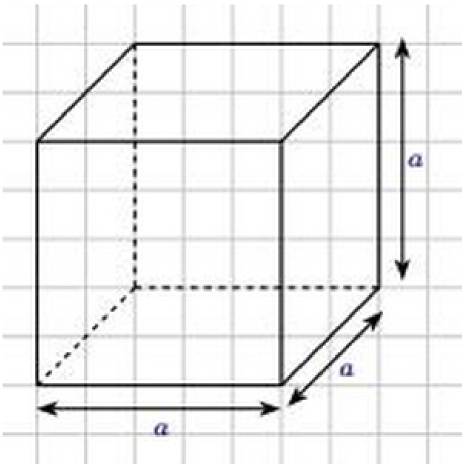
Si $k > 1$, alors on a un agrandissement.

Si $0 < k < 1$, alors on a une réduction.



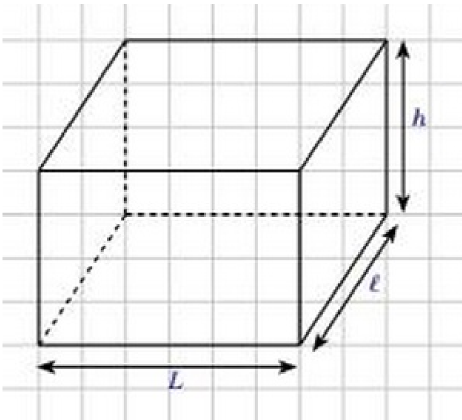
V- Les volumes

5-1/ Cube



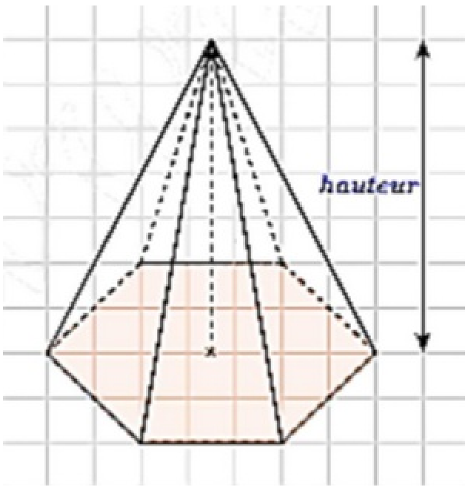
$$Volume = a^3$$
$$Aire\ total = 6a^2$$

5-2/ Parallélépipède



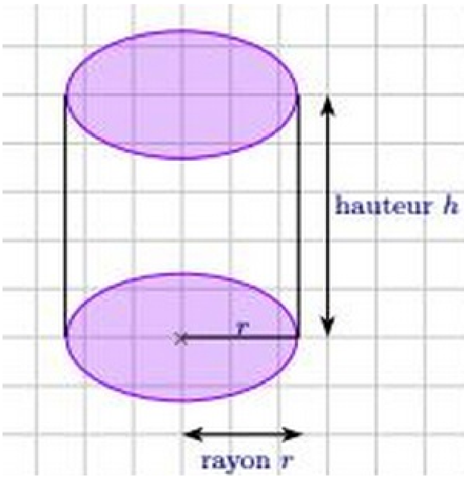
$$Volume = L \times l \times h$$
$$Aire\ total = 2\,(L \times l + L \times h + l \times h)$$

5-3/ Pyramide



$$Volume = \frac{1}{3} \times aire\ base \times hauteur$$
$$Aire\ total = aires\ latérales + aire\ base$$

5-4/ Cylindre



$$Volume = \pi \times \mathrm{r}^2 \times \mathrm{h}$$
$$Aire\ total = 2\pi \times \mathrm{r}\ (\ \mathrm{r} + \mathrm{h}\ )$$

VI- Exercices

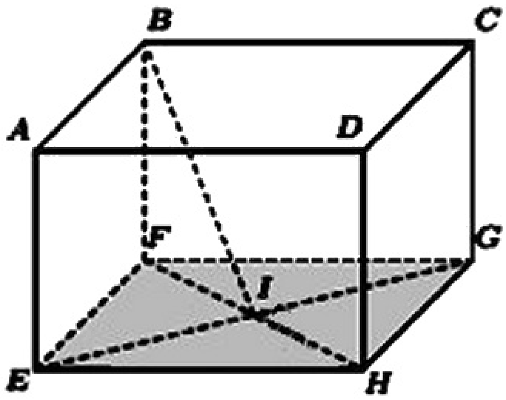
6-1/ Exercice 1

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $AE = 5$.

1. Calculer CH et EG

Soit I le centre du rectangle $EFGH$.

2. Montrer que $(BF)\ \perp\ (EFG)$.
3. En déduire que $(BF)\ \perp\ (IF)$.
4. Calculer IB.

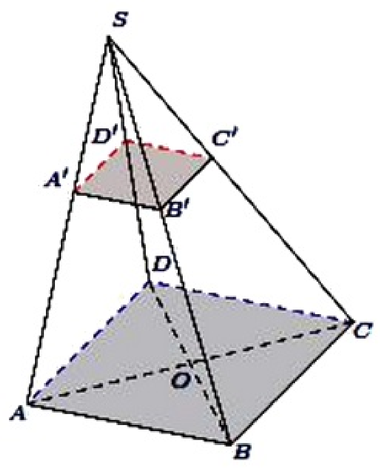


6-2/ Exercice 2

Soit $SABCD$ une pyramide de base carré $ABCD$ et de hauteur (SO) tel que $SO = 5cm$, $AB = 6cm$ et $A'B' = 2cm$.

La pyramide $SA'B'C'D'$ est la réduction de la pyramide $SABCD$.

1. Calculer l'aire de la base $ABCD$.
2. Calculer le volume de la pyramide $SABCD$.
3. Calculer le coefficient de réduction.
4. En déduire le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.



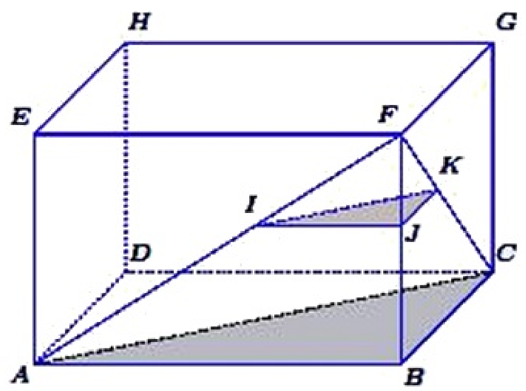
6-3/ Exercice 3

Soit $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle tel que $AB = 12cm$, $AD = 9cm$ et $AE = 9cm$.

1. Vérifier que $AC = 15cm$.
2. Montrer que le volume de la pyramide $FABC$ est $V_1 = 162cm^3$.

La pyramide $FIJK$ est une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ de la pyramide $FABC$.

3. Calculer le volume V_2 de la pyramide $FIJK$.
4. Calculer la distance IK.
5. Calculer l'aire de la base IJK.



6-4/ Exercice 4

On considère la pyramide $OABC$ de base le triangle ABC et de hauteur (OA) tel que $AB = 5cm$, $BC = 4cm$ et $AC = 3cm$.

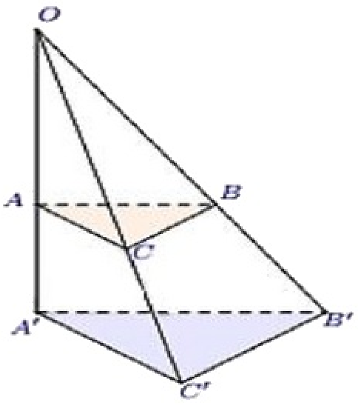
1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. En déduire que l'aire du triangle ABC est $S = 6cm^2$.

On suppose que le volume de la pyramide $OABC$ est $V = 8cm^2$.

3. Vérifier que $OA = 4cm$.

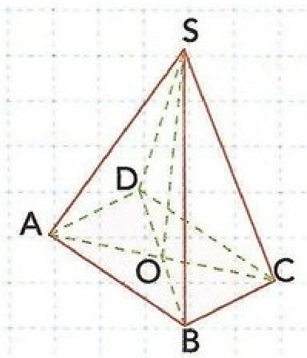
La pyramide $OA'B'C'$ de hauteur (OA') est un agrandissement de La pyramide $OABC$.

4. Sachant que $OA' = 6cm$, vérifier que le rapport d'agrandissement est $k = \frac{3}{2}$.
5. En déduire le volume de la pyramide $OA'B'C'$.



6-5/ Exercice 5

$SABCD$ pyramide régulière de base carrée de centre O telle que $AB = 4cm$:



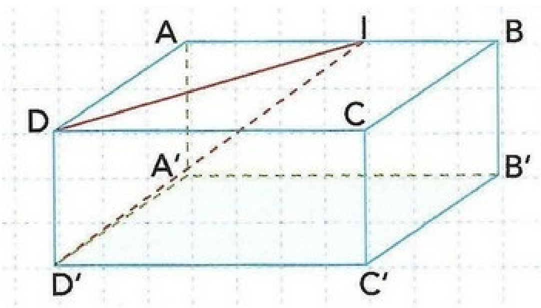
A, B', C' et D' quatre points appartenant respectivement aux côtés $[AS]$, $[BS]$, $[CS]$ et $[DS]$ tels que la pyramide SA'B'C'D' est la réduction de la pyramide $SABCD$ et A'B' $= 1,5cm$.

1. Calculer le coefficient de la réduction.
2. Sachant que $SO = 5cm$, calculer le volume de la pyramide SA'B'C'D'.

6-6/ Exercice 6

$ABCDA$'B'C'D' est un pavé droit tel que $AB = 5$, $BC = 3$ et AA' $= 4$.

I est un point de $[AB]$ tel que $IB = 2$:



1. Montrer que $(DD$'$) \perp (ABC)$.
2. En déduire la nature du triangle IDD'.
3. Calculer ID'.