AlloSchool

Physique et Chimie : 2ème Année Bac

Séance 26B (Aspects énergétiques – Pendule pesant et de torsion)

Professeur : Mr EL GOUFIFA Jihad

Sommaire

I- Pendule de torsion

1-1/ Énergie cinétique

On considère un pendule de torsion formé d'un fil métallique léger auquel est fixé une tige dense.

Soit J_Δ le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation matérialisé par le fil métallique et $\dot{\theta}$ est la vitesse angulaire de la tige à instant t.

On définit l'énergie cinétique du système qu'est en rotation autour de (Δ), à cet instant t par l'expression suivante : $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2$

1-2/ Énergie potentielle de torsion

L’énergie potentielle de torsion d’un pendule de torsion est définie par la relation : $E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2 + Cte$

Avec C la constante de la torsion du pendule, θ angle de torsion en rad et Cte une constante qui dépend du choix de l’état de référence fourni par les conditions initiales.

En générale , on prend $E_{pt} = 0$ pour $\theta = \theta_0 = 0$; soit $Cte = 0$ d’où $E_{pt} = \frac{1}{2}C.\theta^2$

1-3/ Énergie mécanique

On a :

$$E_m = E_c + E_{pt}$$
$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l’énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

On dérive E_m par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + C\theta\dot{\theta} = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$$

C’est la même équation différentielle obtenue à partir de l’étude dynamique.

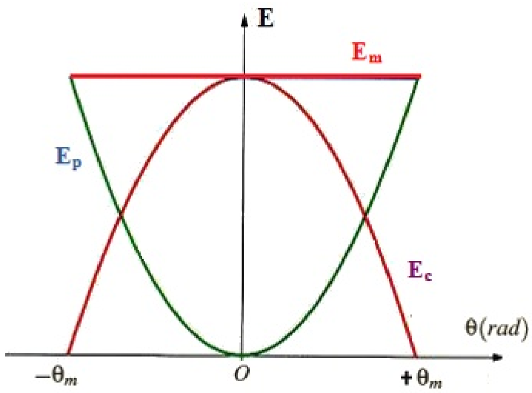
1-4/ Diagramme énergétique

Les frottements sont négligeables, donc on a une conservation d’énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 = Cte$$

Lorsque la tige passe par sa position d’équilibre : $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \pm\dot{\theta}_m$, soit $E_p = 0$ et $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}_m^{\ 2}$

Lorsque la tige passe par ses positions extrêmes : $\theta = \pm\theta_m$ et $\dot{\theta} = 0$, soit $E_p = \frac{1}{2}C\theta_m^{\ 2}$ et $E_c = 0$



II- Pendule pesant

2-1/ Énergie cinétique

L'énergie cinétique du pendule pesant est :

$$E_C = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2$$

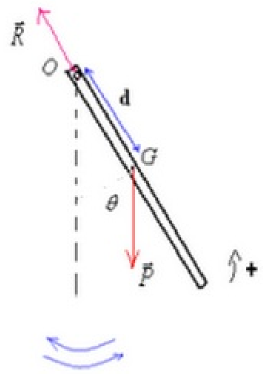
2-2/ Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant est : $E_{pp} = m.g.z + Cte$

En considérant comme état de référence $E_{pp} = 0$ lorsque $z = 0$ $(G = G_0 = O)$, la constante $Cte = 0$ et donc: $E_{pp} = m.g.z$

Lorsque le pendule pesant est incliné d'un angle θ, son énergie potentielle de pesanteur est :

$$E_{pp} = m.g.z$$
$$E_{pp} = m.g\,(d - OG_0)$$
$$E_{pp} = m.g\,(d - d\cos\theta)$$
$$E_{pp} = m.g.d\,(1 - \cos\theta)$$



2-3/ Énergie mécanique

On a :

$$E_m = E_c + E_{pp}$$
$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd\,(1 - \cos\theta)$$

Les oscillations sont non-amorties, donc on a un échange entre l'énergie potentielle et cinétique, alors que celle mécanique reste constante.

On dérive E_m par rapport au temps :

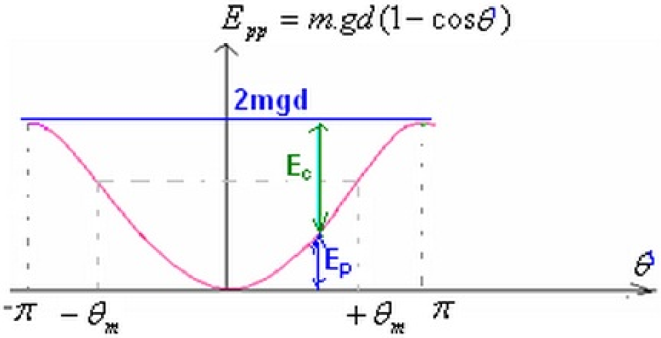
$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd\,(1 - \cos\theta)\right) = 0$$
$$\Rightarrow J_\Delta \dot{\theta}\ddot{\theta} + mgd\sin\theta\dot{\theta} = 0$$
$$\Rightarrow J_\Delta \ddot{\theta} + mgd\theta = 0 \ \ (\sin\theta \approx \theta)$$
$$\Rightarrow \ \ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_\Delta}\theta = 0$$

C'est la même équation différentielle obtenue à partir de l'étude dynamique.

2-4/ Diagramme énergétique

Les frottements sont négligeables, donc on a une conservation d'énergie mécanique :

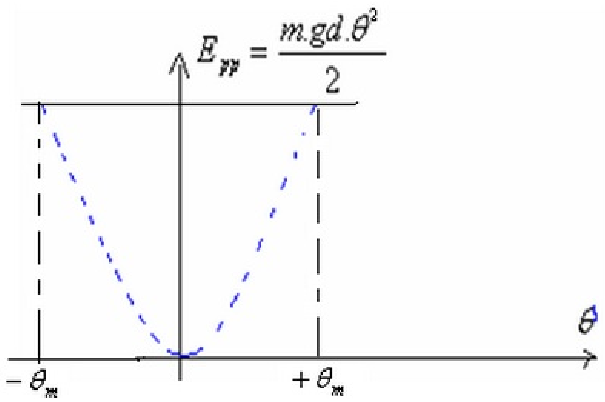
$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 + mgd\,(1 - \cos\theta) = Cte$$



Pour les petites oscillations $(\theta < 15^\circ)$, on a $1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$

Donc on peut écrire par approximation : $E_{pp} = \frac{mgd\theta^2}{2}$

Et on obtient le diagramme suivant :



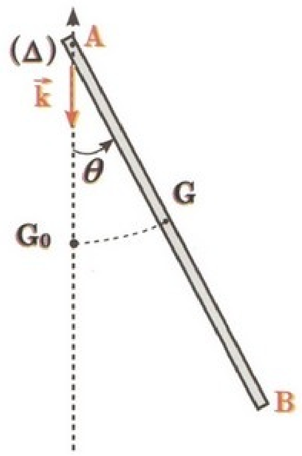
III- Exercices

3-1/ Exercice 1

Une tige AB homogène de masse m et de longueur $AB = \mathrm{l} = 60,0cm$ pouvant tourner dans un plan vertical autour d'un axe (Δ) horizontal fixe passant par son extrémité A.

Le moment d'inertie de cette tige par rapport à l'axe (Δ) est $J_\Delta = \frac{1}{3} m.\mathrm{l}^2$.

On repère à chaque instant la position du pendule pesant par l'abscisse angulaire orienté $\theta \left(\overrightarrow{k}\,;\overrightarrow{AB}\right)$:



On choisit le plan horizontal contenant le point G_0 position du centre d'inertie G de la tige à l'équilibre comme état de référence de l'énergie potentielle de pesanteur $(E_p = 0)$.

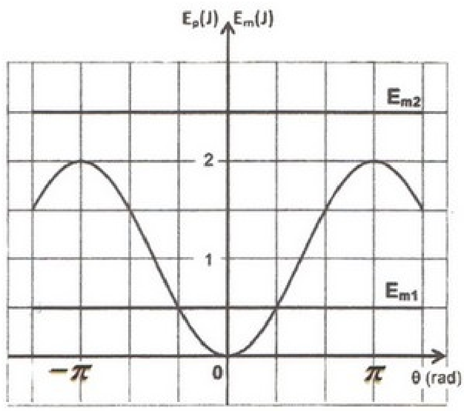
On admet dans le cas de faible amplitude que $1 - \cos\theta \approx \frac{\theta^2}{2}\ \left(rad\right)$, et on prend $g = 9,80\ m.s^{-2}$.

1. Montrer que l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du pendule pesant peut s'écrire sous la forme : $E_P = m.g.\frac{l}{2}\left(1 - \cos\theta\right)$.
2. Dans le cas de faible amplitude, écrire l'expression de l'énergie mécanique à un instant t en fonction de m, l, g, θ et $\frac{d\theta}{dt}$.
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'abscisse angulaire dans le cas de faible amplitude.

On lance la tige AB à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale. Elle acquiert dans chaque cas une énergie mécanique donnée :

- dans le cas 1 : $E_m = E_{m_1}$
- dans le cas 2 : $E_m = E_{m_2}$

Le diagramme suivant donne l'évolution de l'énergie potentielle E_p et de l'énergie mécanique E_m du pendule pesant dans chaque cas :



4. Déterminer à l'aide du diagramme, la nature du mouvement du pendule dans chaque cas.
5. Préciser à partir du diagramme, la valeur maximale de l'abscisse angulaire θ du pendule dans le cas 1. En déduire la masse de la tige.

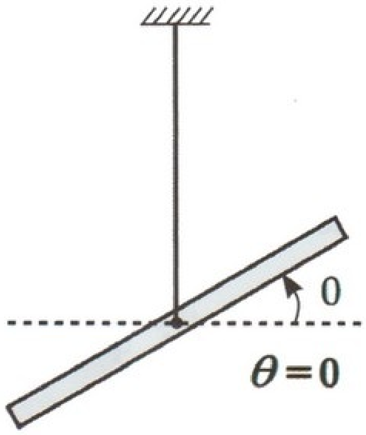
Dans le deuxième cas, l'énergie cinétique du pendule pesant varie entre une valeur minimale $E_{C_{min}}$ et une valeur maximale $E_{C_{max}}$.

6. Trouver les valeurs de $E_{C_{min}}$ et $E_{C_{max}}$.

3-2/ Exercice 2

On considère un pendule de torsion constitué d'un fil de torsion et d'une barre homogène de moment d'inertie J_{Δ}.

On écarte la barre de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_m = \frac{\pi}{10} rad$ par rapport à la position d'équilibre $\theta = 0$, et on la libère sans vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$:



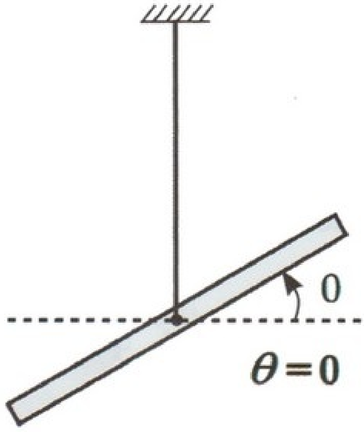
Les amortissements sont négligeables.

1. Montrer que le mouvement de la barre est un mouvement oscillatoire sinusoïdale.
2. Montrer que $\dot{\theta}_m = \frac{2\pi}{T_0}.\theta_m$ où T_0 désigne la période propre du mouvement du pendule.
3. Sachant que $T_0 = 0,2s$, et la constante de torsion $C = 1,2N.m.rad^{-1}$, calculer l'énergie cinétique maximale du pendule de torsion.

3-3/ Exercice 3

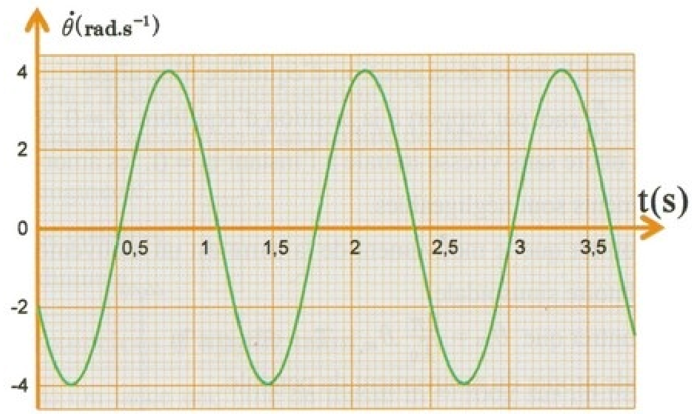
On étudie le mouvement d'un pendule de torsion dans un repère lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.

On repère la position de la tige MN à chaque instant par l'abscisse angulaire orientée $\theta = \left(\overrightarrow{GM_0}; \overrightarrow{GM}\right)$ comme l'indique la figure suivante :



On prend pour état de référence de l'énergie potentielle de torsion $E_{pt} = 0$ pour $\theta = 0$, et on prend $\pi^2 = 10$.

Le pendule effectue des oscillations d'amplitude $\theta_m = \frac{\pi}{4} rad$. L'étude expérimentale a permis d'obtenir la courbe suivante :



1. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le cas de la rotation, établir l'équation différentielle du mouvement du pendule.

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme $\theta\left(t\right) = \theta_m . \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \varphi\right)$ où T_0 est la période propre du pendule.

2. Montrer que l'expression numérique de la vitesse angulaire s'écrit sous la forme $\dot{\theta}\left(t\right) = 4. \sin\left(1,6. \pi. t + \frac{7\pi}{6}\right)$.
3. Déterminer la valeur de la constante de torsion C.
4. Déterminer la valeur de l'énergie mécanique de l'oscillateur et en déduire la valeur de son énergie potentielle à l'origine des dates $\left(t_0 = 0\right)$.